



Modélisation des liaisons mécaniques

Objectif : Définir et caractériser (tableau, schéma) les liaisons entre deux solides en contact.

La cinématique est l'étude des mouvements, sans tenir compte de leurs causes.

La cinématique d'un système est définie par la façon dont les composants sont assemblés les uns avec les autres. Lorsque deux pièces du système possèdent des surfaces en contact, on parle d'une liaison entre ces deux solides. L'ensemble de ces liaisons va donc orienter la cinématique du système.

1 Vecteurs et repère

1.1 Vecteur, base, repère et référentiel

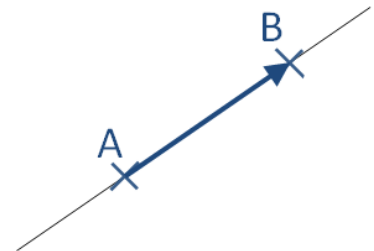
Pour toute la mécanique, nous serons amenés à manipuler des vecteurs.

Définition

Vecteur

Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : la droite passant par A et B ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme** : la distance entre les points A et B .



Pour pouvoir exprimer ce vecteur, on peut exprimer ses composantes ou coordonnées dans une base orthonormée directe.

Définition

Base orthonormée directe

Une base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est l'association de trois vecteurs ; de ce fait, elle **peut traduire** dans l'espace.

Une base est dite **orthonormée** si les **vecteurs** qui la constituent sont **orthogonaux** entre eux et de **norme unitaire**.

Une base directe est une base dont l'orientation des vecteurs respecte la règle de la main droite ; il s'agit d'une convention très utile pour les calculs.

En SI, toutes les bases seront orthonormées et directes.

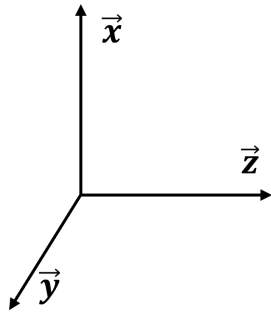
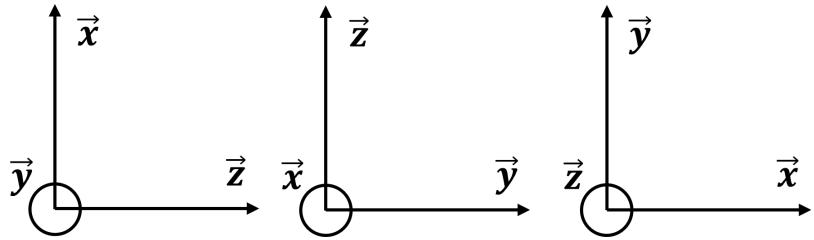
Règle de la main droite

La direction des vecteurs directeurs de la base peut être retrouvée en utilisant les trois premiers doigts de la **main droite** pour une base directe : pouce pour $\vec{x}$, index pour $\vec{y}$ et majeur pour $\vec{z}$.



Sens trigonométrique – ordre alphabétique

Représentation spatiale :

Représentations planes (vecteur sortant) :

Définition

Repère, référentiel et galiléen

- Un **repère** (d'espace) est constitué d'un point d'**origine** O et d'une **base orthonormée** $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On note $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- On appelle **repère galiléen** un **repère d'espace** fixe ou en translation rectiligne uniforme par rapport à l'ensemble de l'univers. Son **accélération absolue** est alors **nulle**. Pour une étude mécanique des systèmes industriels courants, un repère lié à la Terre constitue une bonne approximation du repère galiléen.
- Un **repère de temps** est un repère unidimensionnel orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.
- Un **référentiel** est **composé** d'un **repère d'espace** associé à un **repère de temps**.
- Un **référentiel galiléen** est donc un **repère galiléen** associé à un **repère de temps**.

1.2 Calcul vectoriel

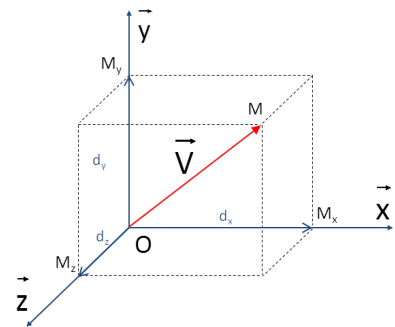
Une fois le repère spécifié, on peut alors déterminer les coordonnées de n'importe quel point à partir des composantes du vecteur associées à l'origine du repère. Par exemple ici :

$$\overrightarrow{OM} = d_x \vec{x} + d_y \vec{y} + d_z \vec{z}.$$

Remarque : On utilisera très peu la notation en co-

lonne $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$, car elle prête à confusion dès lors

que plusieurs repères coexistent.



Lors de nos calculs en mécanique, nous aurons besoin du produit scalaire et du produit vectoriel. Nous utiliserons le produit vectoriel plus tard dans l'année.

1.2.1 Le produit scalaire

Définition

Produit scalaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$, le produit scalaire noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre scalaire (réel) valant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha).$$

Propriétés du produit scalaire :

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Il est distributif sur l'addition des vecteurs : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$, ainsi $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- **Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Donc $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.**

Remarque : Pour une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:
 $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{z} \cdot \vec{z} = 1$ et $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$.

Question 1 : Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y}$ et $\vec{v} = c\vec{y} + d\vec{z}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot (c\vec{y} + d\vec{z}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= ac\vec{x} \cdot \vec{y} + ad\vec{x} \cdot \vec{z} + bc\vec{y} \cdot \vec{y} + bd\vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= bc\end{aligned}$$

1.3 Contact entre deux solides

Définition

Liaison

Une **liaison** entre deux solides est une **relation de contact** entre ces deux solides.

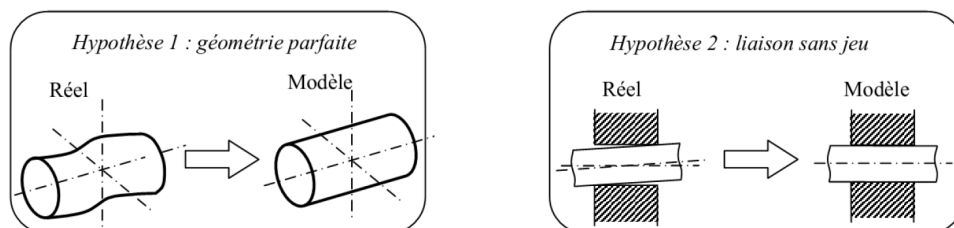
Ce contact est **caractérisé par sa géométrie** (point, ligne, plan ...). Cette géométrie va donc définir les **mouvements relatifs possibles** entre les deux solides.

L'analyse des liaisons se fait donc en analysant la **nature des surfaces en contact**.

1.3.1 Hypothèses de modélisation des liaisons

Les liaisons les plus courantes rencontrées en construction mécanique sont normalisées par l'ISO 3952-1. À chacune des liaisons sont associés un nom et une schématisation. Ces **liaisons** sont **considérées comme parfaites**, c'est-à-dire qu'elles ont les caractéristiques suivantes :

- Leurs **géométries** sont **parfaites**.
- Les **jeux** sont **nuls**.
- Les pièces mécaniques sont modélisées par des **solides indéformables**.
- Le contact entre pièces se fait **sans frottement ni adhérence**.



Remarque : Les zones de contact réelles entre deux solides réels (déformables) sont forcément surfaciques. En revanche, si l'on modélise les pièces réelles par des solides indéformables, il est alors possible de parler de zones de contact ponctuelles et linéiques. Il s'agit d'une approximation de la réalité, qui permet cependant de modéliser de façon très pertinente un certain nombre de liaisons entre solides.

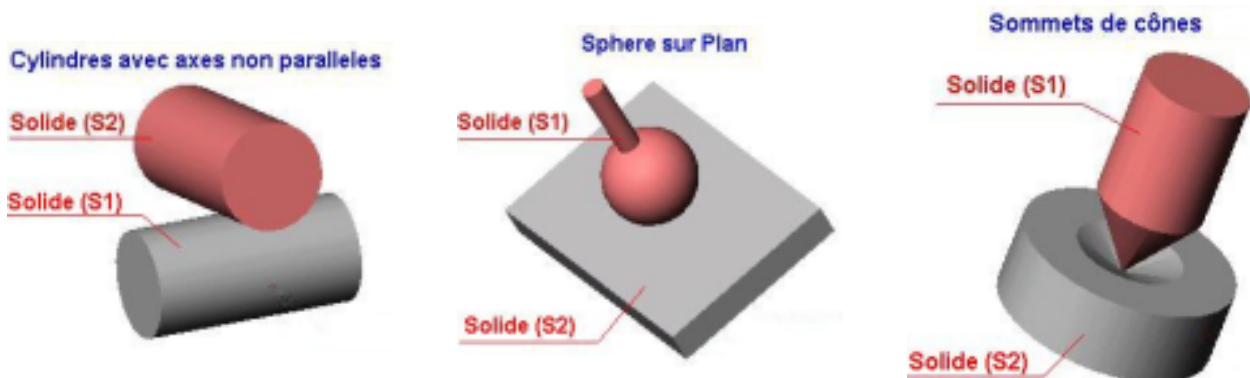
Les liaisons caractérisées de parfaites sont donc des liaisons théoriques, tant d'un point de vue géométrique que du point de vue de la nature physique du contact.

1.3.2 Contact ponctuel

Deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est **un point**.

Exemple

contact sphère/sphère, sphère/plan, cône/plan...



1.3.3 Contact linéique

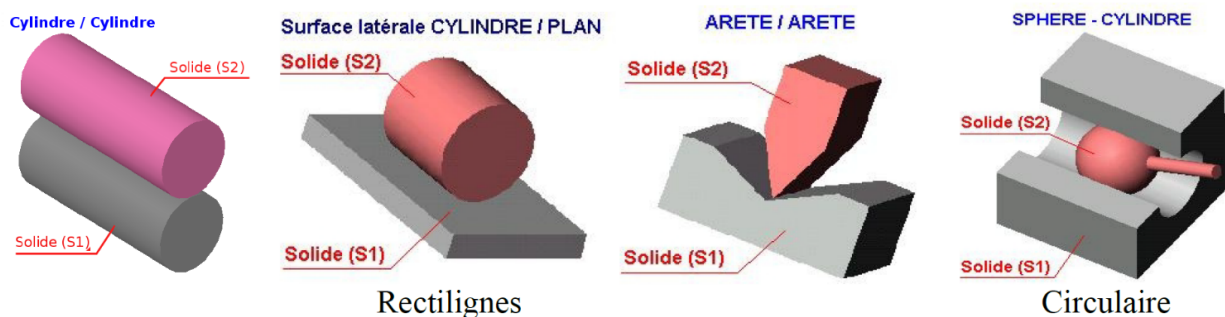
Deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact linéique si l'intersection de leurs représentations géométriques est **une ligne**.

En pratique, on se limitera à deux types de lignes :

- la **droite** (contact linéique rectiligne);
- le **cercle** (contact linéique circulaire).

Exemple

cylindre/plan, coin/plan, dentures d'engrenage...

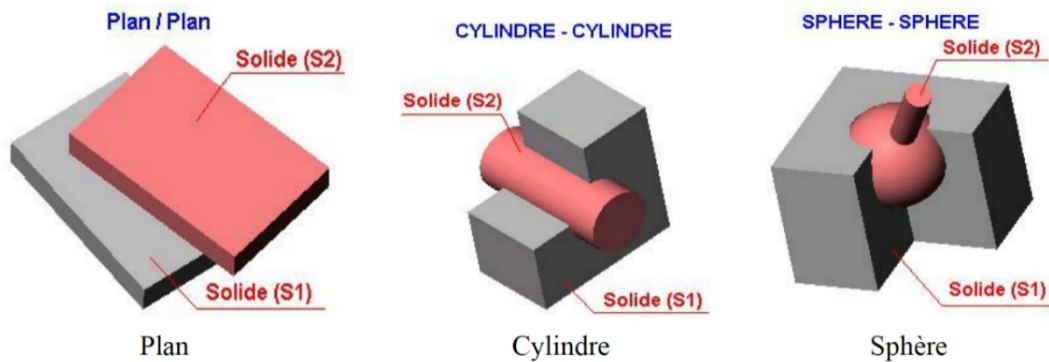


1.3.4 Contact surfacique

Supposons qu'autour d'un point A , il existe pour (S_1) et (S_2) deux surfaces qui ont la même forme géométrique. (S_1) et (S_2) peuvent alors avoir en commun **une surface** qui peut être gauche (idée de courbure) ou plane.

Exemple

plan/plan, cylindre/cylindre, sphère/sphère...



1.4 Liaisons normalisées

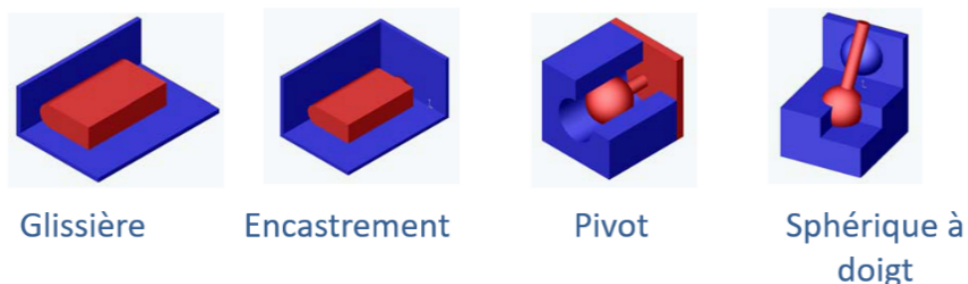
1.4.1 Les liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S_1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S_2 . Les surfaces géométriques élémentaires sont le plan, le cylindre et la sphère.

Le tableau ci-dessous donne les différentes combinaisons possibles ainsi que leurs noms :

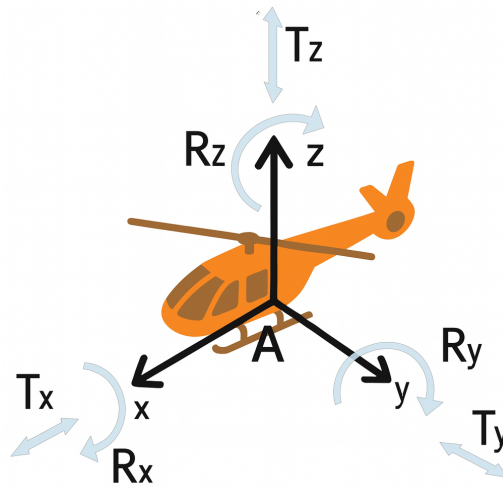
	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	Appui-plan 		
Cylindre	Linéaire rectiligne 	Pivot glissant 	
Sphère	Ponctuelle 	Linéaire annulaire 	Rotule

Ces liaisons élémentaires peuvent être associées entre elles pour former des liaisons composées :



1.4.2 Degrés de liberté autorisés par un contact

Les possibilités de mouvement d'un solide noté S dans l'espace par rapport à un repère $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:



3 Rotations :

- R_x , rotation d'axe $(A, \vec{x})$ (« roulis »)
- R_y , rotation d'axe $(A, \vec{y})$ (« tangage »)
- R_z , rotation d'axe $(A, \vec{z})$ (« lacet »)

3 Translations :

- T_x , translation de direction $\vec{x}$
- T_y , translation de direction $\vec{y}$
- T_z , translation de direction $\vec{z}$

Pour les liaisons, on définit un repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts (point, droite, centre, axe, normale...). Ce repère est ensuite associé à chaque solide. Il y a donc généralement un repère par solide.

On détermine alors les possibilités de mouvement autorisées entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre), sans changer la nature du contact.

Définition

Degré de liberté (DDL)

Le nombre de **degrés de liberté** d'une liaison entre deux solides est le **nombre de mouvements relatifs indépendants** que la liaison autorise entre ces deux solides, sans changer la nature du contact.

Par définition d'une liaison, ce nombre est inférieur à 6. Si le nombre de degrés de liberté est égal à 0, la liaison est dite « encastrement », c'est-à-dire que les deux pièces sont totalement liées, il n'y a aucun mouvement relatif possible.

1.4.3 Torseurs cinématiques associés aux liaisons normalisées

Les **torseurs** sont des structures mathématiques dont nous allons nous servir en mécanique. Nous détaillerons leurs écritures et propriétés ultérieurement. Les **torseurs cinématiques** des liaisons normalisées sont définis en connaissant les mouvements autorisés, soit les **degrés de liberté** de la liaison.

La feuille des liaisons normalisées est à connaître par cœur (en étant capable de modifier les spécifications pour s'adapter au système concerné), ou à retrouver sans difficulté.

Remarque : Un axe est formé par un vecteur d'une base, pour sa direction, ET un point pour sa spatialisation.

2 | Modélisation cinématique d'un mécanisme

Définition	Mécanisme Un mécanisme est un ensemble de solides en contact les uns avec les autres (à travers des surfaces de contact) dont l'objectif est de remplir des fonctions.
Définition	Classe d'équivalence Une classe d'équivalence cinématique est un ensemble de pièces qui n'ont aucun mouvement relatif entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (liaison encastrement) et ont donc le même mouvement.

Remarques :

- On parle de **classe d'équivalence** ou d'**ensemble cinématique**.
- Les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons; **en SI, tous les solides sont indéformables**.

2.1 Graphe des liaisons

Le graphe des liaisons est une figure qui répertorie les classes d'équivalence et les liaisons entre ces classes. **Il est nécessaire de le réaliser en préambule de chaque exercice en mécanique!**

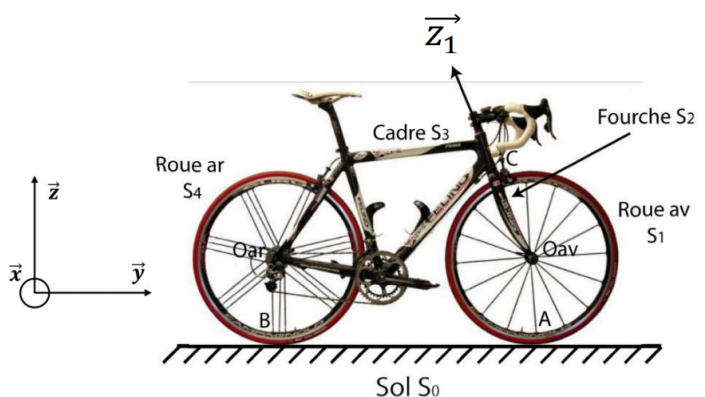
Chaque classe d'équivalence sera repérée par son numéro inscrit dans un cercle. Chaque liaison entre deux classes d'équivalence sera représentée par une ligne joignant les deux cercles correspondants. On inscrira sur chaque ligne les détails concernant la liaison, c'est-à-dire **son nom ET sa spécification** (ses éléments caractéristiques géométriques).

Définition	Bâti Par rapport au référentiel utilisé, on définit un bâti. C'est à dire un ensemble cinématique qu'on considère fixe. Il est repéré par des hachures liées au cercle correspondant. Ceci signifie que l'ensemble cinématique numéroté 0 est considéré comme fixe :
------------	--



Application à un vélo

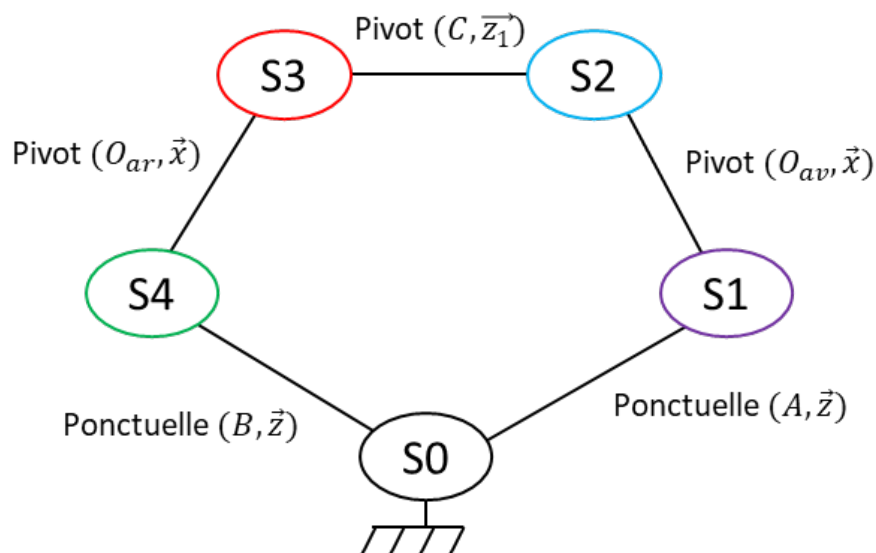
On considère le vélo de route suivant, qui reste parfaitement droit (perpendiculaire à la route). On définit cinq classes d'équivalence : l'ensemble Bâti (S_0), l'ensemble Roue avant (S_1), l'ensemble Roue arrière (S_4), l'ensemble Cadre (S_3), l'ensemble Fourche avant (S_2). Les roues sont en contact avec le sol aux points A et B, les centres des roues sont O_{av} et O_{ar} . La fourche effectue une rotation par rapport au cadre, suivant l'axe $(C, \vec{z}_1)$. On considèrera que la liaison entre le sol et les roues (très bien gonflées!!) est ponctuelle.



Établir un graphe de liaison

1. Repérer les classes d'équivalence cinématiques (en coloriant les pièces par ex.).
2. Commencer par reporter le numéro d'une classe d'équivalence et l'entourer d'un cercle.
3. Rechercher les classes en contact avec la classe précédemment reportée. Faire une liaison en traçant un trait entre ces classes. Répéter pour toutes les classes présentes dans le système.
4. *Vérification* : Compter les couleurs et le nombre de cercles. Le nombre de couleurs doit être égal au nombre de cercles.
5. Pour chaque liaison, déterminer la nature de sa ou ses géométries de contact et en déduire le type de liaison (pour l'instant à l'aide du tableau des liaisons normalisées).
6. Nommer et spécifier chaque liaison.
7. *Vérification* : Compter le nombre de liaisons présentes dans le système, le nombre de traits tracés dans le graphe doit y être égal.

Question 2 : Réaliser le graphe de liaison du vélo.



2.2 Schéma cinématique

Schéma cinématique

C'est une représentation (modélisation) schématique et simplifiée du système au moyen des symboles des liaisons normalisées.

Il permet :

- d'aider à la compréhension du fonctionnement du mécanisme ;
- de mener des études géométriques et cinématiques.

Établir un schéma cinématique

1. Réaliser le graphe des liaisons en choisissant une couleur par classe d'équivalence.
2. Choisir une représentation adaptée (2D : choix des axes représentatifs, ou 3D : perspective (isométrique, cavalière)).
3. Mettre en place les points, les axes, les normales... caractérisant les liaisons reportées dans le graphe des liaisons.
4. Mettre en place les symboles normalisés des liaisons autour de ces points, de ces axes en utilisant les caractéristiques des liaisons pour les déplacer si nécessaire. Il faut utiliser les deux couleurs des classes identifiées – ces deux couleurs sont interchangeables.
5. Relier les liaisons entre elles pour reconstituer les classes d'équivalence.
6. Reporter les numéros des classes sur le schéma.

Question 3 : Réaliser le schéma cinématique du vélo.

