

1. Machine à vapeur

1.1 Présentation

On étudie le fonctionnement d'une machine à vapeur utilisée sur les maquettes de modèle réduit. Les différentes pièces sont modélisées sur SolidWorks sur la Figure 1. Le mécanisme est constitué de 4 classes d'équivalence cinématique :



- le bâti S_0 , qui est axé sur le bateau, constitué du corps 1 et de la bague 8 ;
- le cylindre S_1 , qui reçoit la vapeur pour déplacer le piston, constitué du cylindre 2 et de l'axe de cylindre ;
- le piston S_2 , qui va mettre en mouvement le volant d'inertie ;
- le volant d'inertie S_3 , dont la rotation sera reliée aux aubes du bateau, qui est composé du volant 4, de l'axe principal et de l'axe de volant.

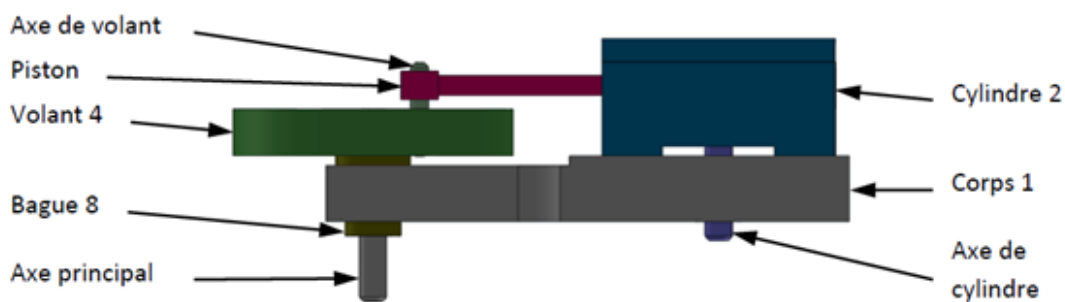


FIGURE 1 – Description du mécanisme de la machine à vapeur

L'objectif est de déterminer le débattement angulaire du cylindre au cours du mouvement de manière à savoir où positionner les entrées/sorties de vapeur d'eau.

1.2 Modélisation

La modélisation de la machine à vapeur est donnée sur le schéma cinématique paramétré de la Figure 2.

On associe au bâti S_0 le repère $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et on pose $\vec{AC} = L\vec{x}_0$.

Le cylindre S_1 est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le bâti S_0 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le piston S_2 est en liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec le cylindre S_1 . La liaison est paramétrée par le vecteur $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$.

Le volant S_3 est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec le piston S_2 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{31} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$. On pose $\vec{CB} = R\vec{x}_3$.

Le volant S_3 est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ avec le bâti S_0 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

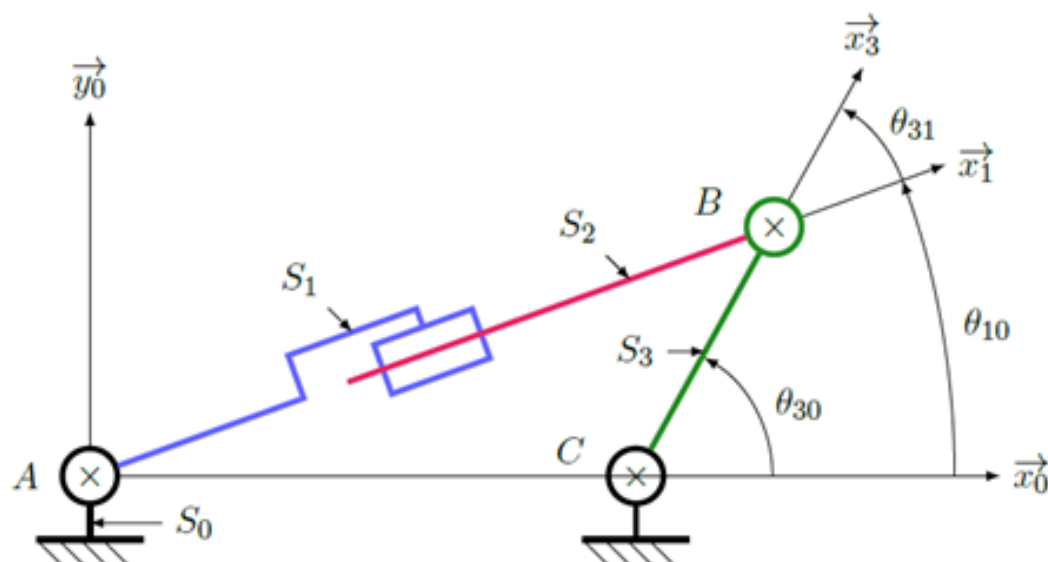
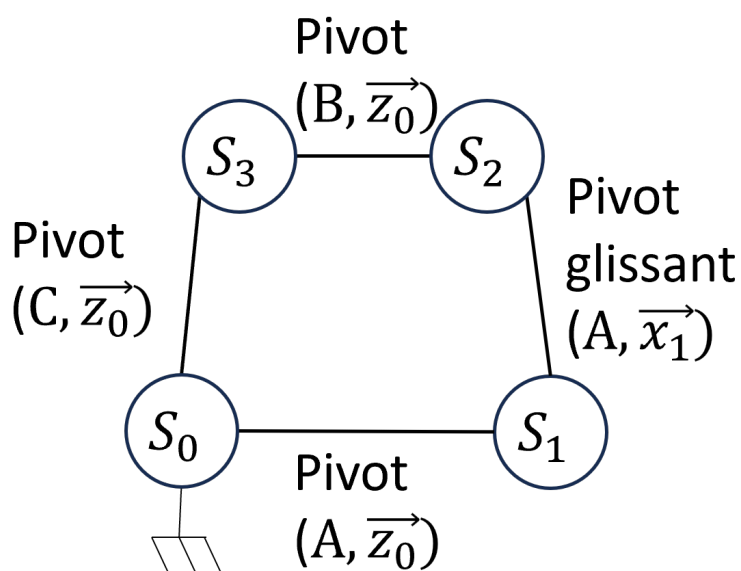


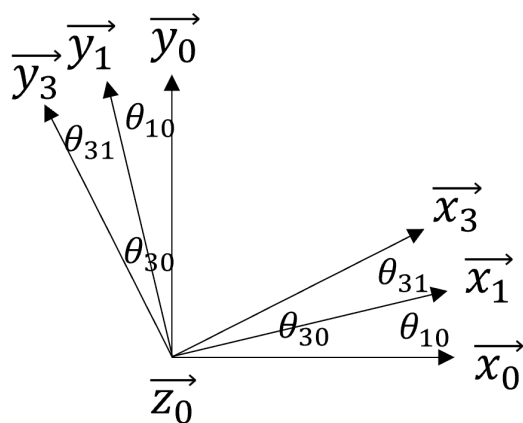
FIGURE 2 – Schéma cinématique de la modélisation de la machine à vapeur

Question 1: Réaliser le graphe des liaisons du système.



Réponse 1:

Question 2: Tracer les figures de changement de base.



Réponse 2:

Question 3: Écrire la fermeture géométrique du système et en déduire les deux équations scalaires associées par projection dans la base $\mathcal{B}_0$. Écrire une relation reliant θ_{30} aux grandeurs $\lambda(t)$, L et R .

Réponse 3: La fermeture géométrique s'écrit :

$$\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}} \text{ soit } \vec{AB} - \vec{CB} - \vec{AC} = \vec{0}$$

En remplaçant : $\lambda(t)\vec{x}_1 - R\vec{x}_3 - L\vec{x}_0 = \vec{0}$

En projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$:

$$\lambda(t)(\cos\theta_{10}\vec{x}_0 + \sin\theta_{10}\vec{y}_0) - R(\cos\theta_{30}\vec{x}_0 + \sin\theta_{30}\vec{y}_0) - L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

D'où :
$$\begin{cases} \lambda(t)\cos\theta_{10} - R\cos\theta_{30} - L = 0 \\ \lambda(t)\sin\theta_{10} - R\sin\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

On souhaite éliminer θ_{10} , donc on isole les termes avec θ_{10} :

$$\begin{cases} \lambda(t)\cos\theta_{10} = R\cos\theta_{30} + L \\ \lambda(t)\sin\theta_{10} = R\sin\theta_{30} \end{cases}$$

En passant les deux équations au carré et en les sommant il vient : $\lambda^2(t) = (L + R\cos\theta_{30})^2 + (R\sin\theta_{30})^2$

soit en développant et en simplifiant :
$$\boxed{\theta_{30} = \arccos\left(\frac{\lambda^2(t) - R^2 - L^2}{2RL}\right)}$$

Question 4: Exprimer l'angle du cylindre S_1 , θ_{10} , en fonction de l'angle du volant S_3 , θ_{30} , de R et de L .

Réponse 4: Cette fois nous voulons éliminer le $\lambda(t)$, en faisant le quotient des équations scalaires précédentes (projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$) il vient :

$$\boxed{\theta_{10} = \arctan\left(\frac{R\sin\theta_{30}}{R\cos\theta_{30} + L}\right)}$$