



# Paramétrage et fermeture géométrique

## Objectif

Identifier les différents paramètres cinématiques d'un système et trouver sa loi entrée/sortie avec une fermeture géométrique.

## 1 Paramètres

### 1.1 Paramètres internes

Ils représentent la géométrie interne aux pièces comme la taille d'une pièce par exemple. Ils sont constants (solides indéformables) et on utilisera les lettres de l'alphabet latin pour les nommer.

### 1.2 Paramètres de liaison et changement de base

Afin d'étudier les mouvements des solides les uns par rapport aux autres (cinématique), chaque ensemble cinématique sera associé à son repère. L'évolution de ces repères permet donc de décrire les mouvements des solides. Il est alors nécessaire d'avoir des outils/méthodes pour manipuler ces repères.

Nous avons vu qu'un repère est constitué d'un point et d'une base de vecteurs (orthonormée directe). Il est assez trivial de caractériser un point par rapport à un autre, via un vecteur. La première étape de l'étude est de caractériser les bases les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire d'effectuer des changements de base.

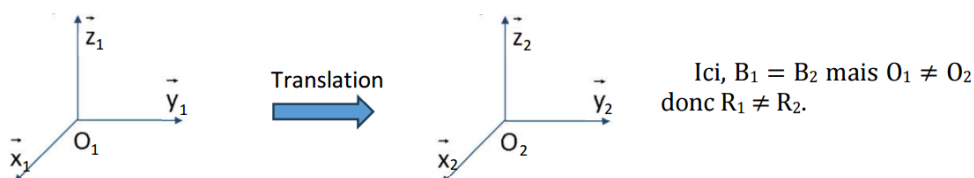
#### 1.2.1 Paramètres de liaison

Pour chaque mobilité entre deux solides, on associera un paramètre par degré de liberté. Usuellement, il s'agit de lettres grecques, symbolisant le fait que ces paramètres sont des variables donc non constants (leur dérivée par rapport au temps est non nulle).

On choisira de préférence les lettres  $\alpha, \beta, \theta, \varphi$  pour les angles et  $\lambda, \mu$  pour les longueurs.

#### 1.2.2 Paramètre pour la translation

L'objectif étant de réaliser un changement de base, les translations ne poseront pas de problèmes. En effet, les vecteurs d'une base pouvant être déplacés dans l'espace, la base elle-même peut effectuer une translation sans être modifiée. Ainsi, un degré de liberté de translation ne produit pas de nouvelle base.



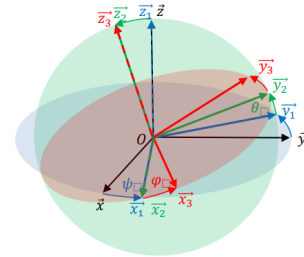
### 1.2.3 Paramètre angulaire

Dans le cas simple d'une seule rotation, un seul angle permet de caractériser la rotation entre les deux solides. On peut alors réaliser une figure de changement de base pour pouvoir passer d'une base à l'autre.

#### Remarques :

- Les figures de changement de base s'appellent aussi figures géométrales, de calculs, planes...
- Elles sont essentielles pour déterminer les équations de changement de base.
- Elles facilitent grandement le calcul vectoriel.

Lorsqu'il existe plusieurs rotations entre deux solides, on décompose les rotations de sorte à se ramener à une rotation à la fois. Chaque degré de liberté de rotation produit une nouvelle base. Pour paramétrer trois rotations, on peut utiliser les angles d'Euler.



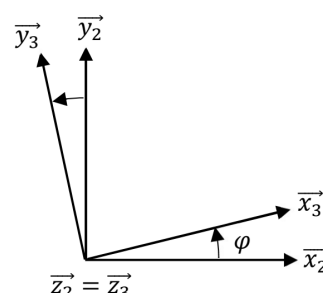
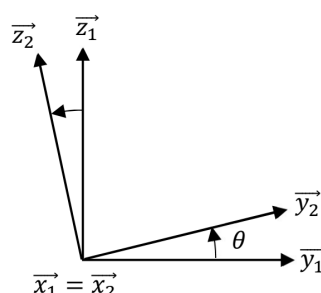
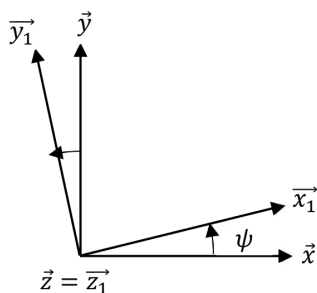
Méthode

#### Déterminer une figure de changement de base

Dans la pratique, les problèmes seront toujours posés de telle sorte que le passage d'une base à une autre consécutive se fera par une unique rotation. Il convient alors de ne pas se tromper dans l'écriture des équations de changement de base. Pour ce faire, suivre la méthode suivante :

1. Dessiner le trièdre vu de face en mettant un vecteur vers la droite et un vers le haut.
2. Renseigner en premier le vecteur de rotation normal (celui autour duquel la rotation s'effectue) et sortant à la feuille. Puis rajouter les autres de sorte à former une base orthonormée directe, pour cela :
  - suivre la règle de la main droite ou celle du sens trigonométrique – ordre alphabétique.
3. Dessiner le second trièdre, incliné par rapport au premier avec un angle petit et positif ( $\sim 30^\circ$ ), peu importe la représentation sur le schéma cinématique.
4. Placer le premier avec vecteur de la seconde base tel qu'est défini l'angle de rotation puis compléter de sorte à avoir une seconde base directe.
5. On peut éventuellement en déduire les équations de changement de bases en étudiant le sens des projections (+ ou -) et leur longueur (grand = cos, petit = sin). Il s'agit d'utiliser des triangles rectangles.

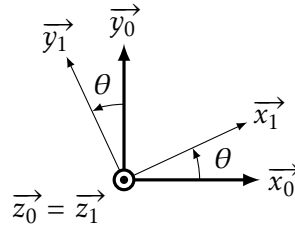
**Question 1 :** Réaliser les figures de changement de base des angles d'Euler ( $\psi = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ ;  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;  $\varphi = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ ).



**Application directe**

On considère un solide 0 associé à un repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec un solide 1 de repère  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , paramétrée par un angle  $\alpha$ .

**Question 2 :** Réaliser la figure de changement de base.



**Question 3 :** Réaliser les produits scalaires suivants :  $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0$ ,  $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0$  et  $\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0$ .

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 &= \cos(\alpha) & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 &= \cos(\alpha) \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 &= \sin(\alpha) & \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

**Question 4 :** Réaliser les projections de  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \theta_{10} \vec{x}_0 + \sin \theta_{10} \vec{y}_0, \\ \vec{y}_1 = -\sin \theta_{10} \vec{x}_0 + \cos \theta_{10} \vec{y}_0. \end{cases}$$

**Contexte**

Pour la suite du cours, nous allons étudier un hayon de voiture.

On nous donne le modèle cinématique du système. Il est constitué de 4 groupes cinématiques :

- 0 : Le châssis de la voiture considéré comme le bâti ;
- 1 : Le hayon en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- 2 : Le corps de vérin en liaison rotule de centre A avec le châssis et en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{y}_2)$  avec la tige de vérin ;
- 3 : la tige de vérin en liaison rotule en C avec le hayon.

On peut alors définir un paramétrage pertinent pour le système. On commence par définir le repère lié au châssis 0 :

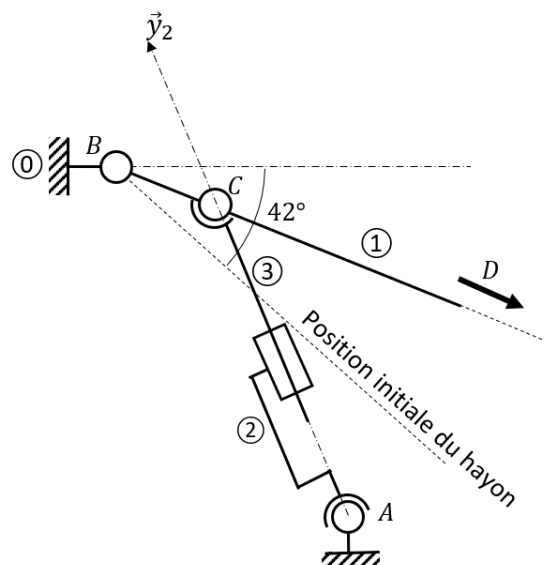
$$\mathcal{R}_0(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

Pour le hayon 1, on pose son repère :

$$\mathcal{R}_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

$$\text{Avec } \theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1),$$

$$\overrightarrow{BC} = c \vec{x}_1, \quad \overrightarrow{BD} = d \vec{x}_1.$$



Pour le corps de vérin 2, on pose son repère :

$$\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0),$$

Avec  $\theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2),$

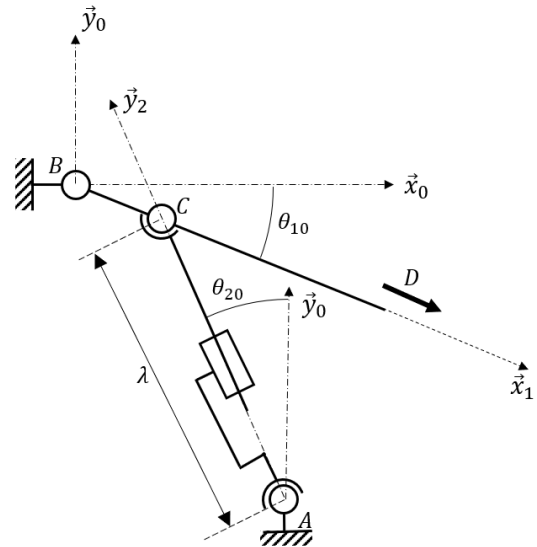
$$\overrightarrow{BA} = a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0.$$

Pour la tige de vérin 3, on a une translation donc la base reste inchangée

$$\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0), \quad \overrightarrow{AC} = \lambda(t)\vec{y}_2.$$

**Données numériques :**

$$a = 0,32\text{ m} ; \quad b = 0,47\text{ m} ; \quad c = 0,14\text{ m} ; \quad d = 1\text{ m}.$$



## 2 | Lier des paramètres géométriques

Dès lors que le système forme au moins une boucle fermée, il est possible de lier les paramètres géométriques grâce à une équation vectorielle. On parle aussi de fermeture géométrique.

Le principe consiste à partir d'un point d'une liaison de la chaîne étudiée, de faire le tour de la chaîne en passant par les points qui nous intéressent, et de revenir au point de départ, c'est une relation de Chasles. Ensuite, exprimer chaque vecteur en fonction des paramètres géométriques du mécanisme.

### Application au hayon de voiture

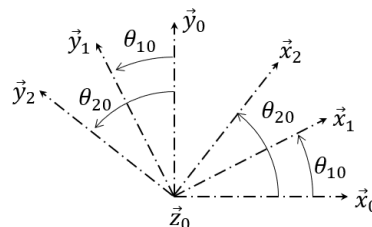
Lorsqu'on ouvre le coffre (soulève le hayon), cela entraîne le déplacement des autres pièces, en particulier l'allongement du vérin.

**Objectif :** Déterminer la relation entre la longueur du vérin et l'angle du hayon par rapport à la voiture.

On cherche en particulier à déterminer la course du vérin pour assurer une ouverture du coffre de  $60^\circ$ . La démarche est la suivante :

1. Déterminer l'expression de  $\lambda$  en fonction de  $\theta_{10}$ .
2. En déduire l'expression de la course du vérin.

**Question 5 :** Établir les figures et équations de changement de bases pour les deux bases mobiles.



$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \theta_{10} \vec{x}_0 + \sin \theta_{10} \vec{y}_0, & \vec{x}_2 &= \cos \theta_{20} \vec{x}_0 + \sin \theta_{20} \vec{y}_0, \\ \vec{y}_1 &= -\sin \theta_{10} \vec{x}_0 + \cos \theta_{10} \vec{y}_0, & \vec{y}_2 &= -\sin \theta_{20} \vec{x}_0 + \cos \theta_{20} \vec{y}_0. \end{aligned}$$

**Question 6 :** Déterminer la relation entre  $\lambda$  et  $\theta_{10}$  à partir d'une fermeture géométrique (relation de Chasles).

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

Soit

$$\lambda(t)\vec{y}_2 - c\vec{x}_1 + a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0 = \vec{0}.$$

### Méthode de réflexion

- On cherche  $\lambda(t)$  : c'est l'inconnue recherchée en fonction de  $\theta_{10}(t)$ .
- $\theta_{10}(t)$  est une donnée, elle se cache dans  $\vec{x}_1$ .
- $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes données.
- Dans  $\vec{x}_2$  se cache  $\theta_{20}$  qui est un paramètre inconnu non recherché.

**Il faut toujours éliminer le(s) paramètre(s) inconnu(s) non recherché(s).**

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Méthode<br>↓ | <p style="text-align: center; color: #e67e22;"><b>Éliminer un paramètre angulaire inconnu</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Projeter l'équation vectorielle dans une base unique (souvent la base fixe).</li> <li>2. Isoler dans chaque équation ce qui dépend du paramètre à éliminer.</li> <li>3. Passer les équations au carré puis les sommer de sorte à éliminer l'angle grâce à la formule <math>\cos^2 + \sin^2 = 1</math>.</li> </ol> |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Il faut faire apparaître  $\cos \theta_{20}$  et  $\sin \theta_{20}$ . Pour cela, il suffit de projeter la relation dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

$$\begin{aligned} \lambda(t)(-\sin \theta_{20} \vec{x}_0 + \cos \theta_{20} \vec{y}_0) - c(\cos \theta_{10} \vec{x}_0 + \sin \theta_{10} \vec{y}_0) + a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0 &= \vec{0} \\ (a - \lambda(t)\sin \theta_{20} - c\cos \theta_{10})\vec{x}_0 + (-b + \lambda(t)\cos \theta_{20} - c\sin \theta_{10})\vec{y}_0 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} a - \lambda(t)\sin \theta_{20} - c\cos \theta_{10} = 0, \\ -b + \lambda(t)\cos \theta_{20} - c\sin \theta_{10} = 0. \end{cases}$$

On isole l'inconnue non recherchée (ici  $\theta_{20}$ ).

$$\begin{cases} \lambda(t)\sin \theta_{20} = a - c\cos \theta_{10}, \\ \lambda(t)\cos \theta_{20} = b + c\sin \theta_{10}. \end{cases}$$

On élève au carré et on additionne.

$$\begin{aligned} \lambda^2(t) &= (a - c\cos \theta_{10})^2 + (b + c\sin \theta_{10})^2, \\ \lambda^2(t) &= a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b\sin \theta_{10} - a\cos \theta_{10}), \\ \lambda(t) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b\sin \theta_{10} - a\cos \theta_{10})}. \end{aligned}$$

**Question 7 :** À partir de l'équation scalaire obtenue, donner les expressions littérales de  $L_{\max}$  (longueur maxi) et  $L_{\min}$  (longueur mini) du vérin en fonction de l'angle  $\theta_{\min}$  et  $\theta_{\max}$  et des constantes géométriques du système.

$$\begin{aligned} L_{\max} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b\sin \theta_{\max} - a\cos \theta_{\max})}, \\ L_{\min} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b\sin \theta_{\min} - a\cos \theta_{\min})}, \\ \theta_{\min} &= -42^\circ; \quad \theta_{\max} = 60^\circ - 42^\circ = 18^\circ. \end{aligned}$$

**Question 8 :** Calculer la course du vérin lors de l'ouverture complète du coffre.

La course du vérin est définie par

$$C_v = L_{\max} - L_{\min}.$$

### Applications numériques

$$L_{\max} = 0,42 \text{ m} \quad \text{et} \quad L_{\min} = 0,26 \text{ m}, \quad \text{Course} \simeq 0,16 \text{ m}.$$

Supposons que l'on cherche maintenant à déterminer l'angle  $\theta_{20}$  en fonction de l'angle  $\theta_{10}$ .

Le point de départ est toujours le même, la fermeture géométrique (souvent même le système d'équations scalaires qui en découle).

Méthode

**Éliminer un paramètre linéaire inconnu**

1. Projeter l'équation vectorielle dans une base unique (souvent la base fixe).
2. Isoler dans chaque équation ce qui dépend du paramètre à éliminer.
3. Faire le rapport des deux équations de sorte à faire disparaître la longueur indésirable (attention aux conditions de division).

On projette sur la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et on isole l'inconnue non recherchée (ici  $\lambda$ ).

$$\begin{cases} \lambda(t) \sin \theta_{20} = a - c \cos \theta_{10}, \\ \lambda(t) \cos \theta_{20} = b + c \sin \theta_{10}. \end{cases}$$

Pour éliminer  $\lambda$ , il suffit alors de faire le rapport des deux équations et faire apparaître  $\tan \theta_{20}$ .

$$\tan(\theta_{20}) = \frac{a - c \cos \theta_{10}}{b + c \sin \theta_{10}} \quad \text{avec} \quad \sin \theta_{10} \neq -\frac{b}{c}.$$

## 2.1 Loi entrée/sortie cinématique

La cinématique est l'étude des vitesses. La vitesse étant la dérivée de la position, il suffit de dériver par rapport au temps la relation obtenue grâce à la fermeture géométrique pour en déduire la loi entrée-sortie cinématique. Il s'agit d'une relation entre le(s) paramètre(s) en entrée du système et le(s) paramètre(s) en sortie.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b \sin \theta_{10} - a \cos \theta_{10})} \\ \Rightarrow \dot{\lambda} &= \frac{c\dot{\theta}_{10}(b \cos \theta_{10} + a \sin \theta_{10})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b \sin \theta_{10} - a \cos \theta_{10})}}. \end{aligned}$$

## 3 Conclusion

Pour effectuer une fermeture géométrique, il faut successivement :

- Effectuer le paramétrage du schéma cinématique (souvent donné);
- Réaliser les figures de changement de bases;
- Déterminer les paramètres constants et les variables;
- Écrire l'équation de fermeture géométrique;
- Éliminer les variables non demandées en appliquant l'une des deux méthodes;
- En déduire l'expression de la loi entrée-sortie géométrique;
- Éventuellement dériver si l'on souhaite avoir la loi entrée-sortie cinématique.

**Remarque :** Tous les problèmes de mécanique nécessiteront de manipuler les changements de bases, dès le début de l'étude. Il est donc impératif que cette notion soit totalement maîtrisée!

## 4 | Bonus

Il existe d'autres méthodes pour éliminer les paramètres non recherchés. Les deux méthodes précédentes (une pour éliminer les paramètres angulaires et une pour les linéaires) sont suffisantes. Je vous encourage à bien les maîtriser avant de vous intéresser aux méthodes suivantes qui sont plus situationnelles (pas toujours les plus efficaces).

### 4.1 Éliminer un paramètre angulaire

On peut aussi rester en vectorielle et isoler le vecteur unitaire qui fait apparaître l'angle à éliminer d'un côté de l'équation vectorielle, à élever ensuite au carré. La fermeture géométrique donne :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

On cherche  $\lambda$  mais pas  $\theta_{20}$ . Autrement dit, on cherche la norme du vecteur  $\overrightarrow{AC}$  indépendamment de sa direction.

Donc on calcule sa norme.

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2, \\ \lambda^2 &= \|a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0 + c\vec{x}_1\|^2 = (a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0 + c\vec{x}_1) \cdot (a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0 + c\vec{x}_1).\end{aligned}$$

Rappel :  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= a^2 \underbrace{(\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0)}_1 - 2ab \underbrace{(\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0)}_0 - 2ca \underbrace{(\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1)}_{\cos \theta_{10}} \\ &\quad + b^2 \underbrace{(\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0)}_1 + 2bc \underbrace{(\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1)}_{\sin \theta_{10}} + c^2 \underbrace{(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1)}_1 \quad (\text{commutatif}) \\ \lambda^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b \sin \theta_{10} - a \cos \theta_{10})\end{aligned}$$

On retrouve bien la même expression.

### 4.2 Éliminer un paramètre linéaire

Lorsque l'inconnue à éliminer est un scalaire en facteur d'un vecteur unitaire, la projection de l'équation vectorielle sur un vecteur unitaire orthogonal élimine cette inconnue.

Le problème est ici d'éliminer  $\lambda$  qui est une longueur. Comme cette distance est mesurée suivant  $\vec{y}_2$ , il suffit, pour l'éliminer, de projeter sur un vecteur perpendiculaire soit ici  $\vec{x}_2$ .

$$\begin{aligned}a\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2 - b\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_2 - c\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 &= 0 \\ a \cos \theta_{20} - b \sin \theta_{20} - c \cos(\theta_{20} - \theta_{10}) &= 0\end{aligned}$$

Avec les formules de trigo

$$\begin{aligned}a \cos \theta_{20} - b \sin \theta_{20} - c[\cos \theta_{20} \cos \theta_{10} + \sin \theta_{20} \sin \theta_{10}] &= 0 \\ (a - c \cos \theta_{10}) \cos \theta_{20} - (b + c \sin \theta_{10}) \sin \theta_{20} &= 0\end{aligned}$$

D'où

$$\tan(\theta_{20}) = \frac{a - c \cos \theta_{10}}{b + c \sin \theta_{10}}.$$

**Remarque :** L'autre méthode est plus simple ici car les deux angles sont paramétrés par rapport à  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Avec un autre paramétrage, cette méthode pourrait être plus rapide.