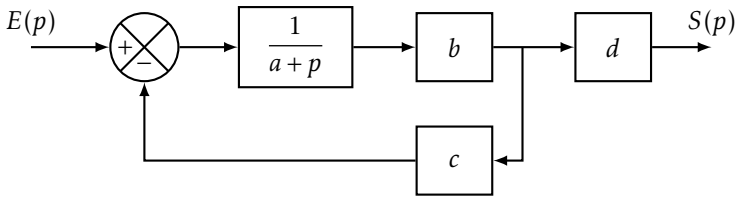
TD03-03 - correction

1 | Déterminer une réponse temporelle

Soit le schéma-blocs suivant :



Avec $a = 1$, $b = 0{,}5$, $c = 2$ et $d = 6$.

Question 1 : Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée, notée $H(p)$, en fonction de a, b, c et d, puis remplacer ces paramètres par leurs valeurs numériques.

Réponse 1 : La formule de Black donne

$$H(p) = \frac{bd}{p + a + bc} = \frac{3}{p+2}.$$

Question 2 : On prend comme entrée $e(t) = 4u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon unité. En déduire l'expression de $S(p)$.

Réponse 2 :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{3}{p+2}\frac{4}{p} = \frac{12}{p(p+2)}.$$

Question 3 : En déduire l'expression de $s(t)$.

Réponse 3 : Il est demandé $s(t)$ pour tout t, il faut utiliser la transformée inverse de Laplace. Cependant, cette expression n'est pas une transformée usuelle, il faut alors faire la décomposition en élément simple :

$$\frac{12}{p(p+2)} = \frac{-6}{p+2} + \frac{6}{p}, \qquad s(t) = 6\left(1 - e^{-2t}\right)u(t).$$

2 | Régulateur de vitesse

Un régulateur de vitesse est un dispositif électronique permettant au conducteur de ne plus ajuster en permanence la vitesse de son véhicule : le calculateur prend en charge l'accélérateur afin de maintenir la vitesse $V(t)$ au plus près de la vitesse consigne $V_c(t)$ demandée par le conducteur.

Les performances attendues au cahier des charges sont :

- un système stable et non oscillant (sans dépassement) ;
- un système précis ;
- un temps de réponse à 5 % de 20 s maximum.

La figure 1 montre l'architecture de l'asservissement.

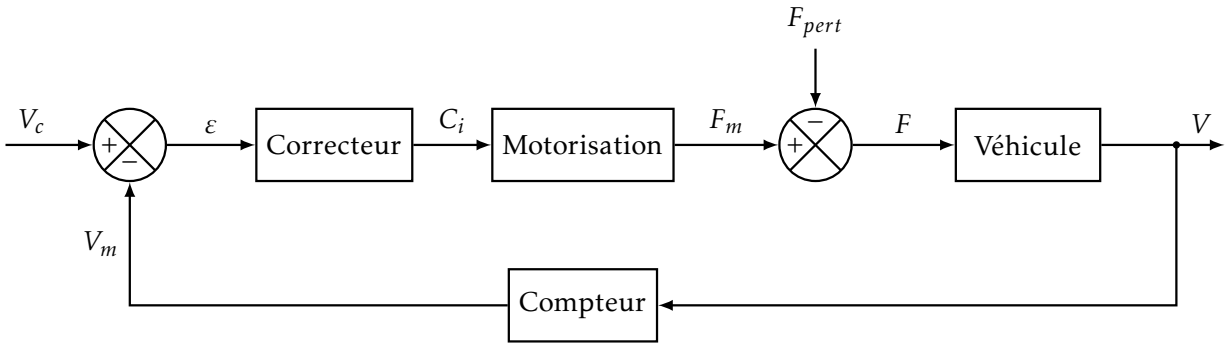


FIGURE 1 – Architecture du régulateur de vitesse

L'ensemble de la motorisation est modélisé par un gain $K_m = 25\,\text{N}$ liant la commande des injecteurs $C_i(t)$ à la force de traction exercée par les roues sur le véhicule $F_m(t)$. Une perturbation due au vent ou aux côtes applique un effort $F_{pert}(t)$ non prévisible sur le véhicule.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation liant la force totale $F(t)$ à la vitesse $V(t)$:

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = F(t) - fV(t),$$

où $m = 900\,\text{kg}$ est la masse et $f = 30\,\text{N.s.m}^{-1}$ un coefficient de frottement aérodynamique.

Un compteur de vitesse, de gain unitaire $K_c = 1$, mesure la vitesse $V(t)$ et fournit l'information $V_m(t)$ comparée à la vitesse consigne. Le correcteur, de fonction de transfert $C(p)$, établit à partir de l'écart ε la commande $C_i(t)$. Dans une première approximation, la carte de commande est modélisée par un gain $C(p) = K_p = 5\,\text{s.m}^{-1}$.

Question 4 : L'asservissement est-il régulateur ou suiveur dans ce cas ?

Réponse 4 : L'asservissement est régulateur car la consigne de vitesse est constante en fonctionnement normal.

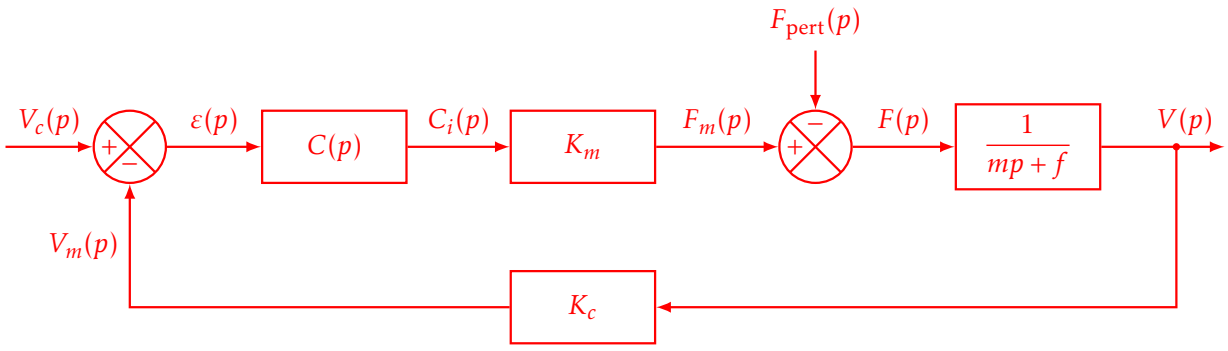
Question 5 : Transformer dans le domaine de Laplace l'équation de comportement du véhicule, sous les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles). En déduire la fonction de transfert $\dfrac{V(p)}{F(p)}$.

Réponse 5 :

$$mpV(p) = F(p) - fV(p) \quad \Longrightarrow \quad (mp+f)V(p) = F(p) \quad \Longrightarrow \quad \frac{V(p)}{F(p)} = \frac{1}{mp+f}.$$

Question 6 : Recopier le schéma-blocs de la figure 1 en remplaçant chaque mot par une fonction de transfert.

Réponse 6 :



Question 7 : Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $\frac{V_m(p)}{\varepsilon(p)}$, puis la fonction de transfert en boucle fermée $\frac{V(p)}{V_c(p)}$ en considérant la perturbation nulle $F_{pert}(p) = 0$.

Réponse 7 :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{V_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)K_m\frac{1}{mp+f}K_c = \frac{K_mK_p}{mp+f}.$$

Par la formule de Black :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{C(p)K_m\dfrac{1}{mp+f}}{1+C(p)K_m\dfrac{1}{mp+f}K_c} = \frac{K_mK_p}{mp+f+K_mK_p}.$$

Question 8 : Mettre la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme canonique $\frac{K}{(1+\tau p)}$, où K et τ sont à déterminer. En déduire l'ordre et la classe du système.

Réponse 8 : Par identification :

$$K = \frac{K_mK_p}{f+K_mK_p}, \qquad \tau = \frac{m}{f+K_mK_p}.$$

Il s'agit d'une fonction de transfert d'ordre 1 et de classe 0 (pas de p en facteur au dénominateur).

On souhaite désormais déterminer les performances du système.

Question 9 : Déterminer le pôle de la fonction de transfert en boucle fermée et en déduire si le système est stable.

Réponse 9 : Le pôle est $p = \frac{-1}{\tau}$. Il est réel strictement négatif : le système est stable.

Question 10 : Déterminer la valeur finale de $V(t)$ pour une entrée en échelon $V_c(t) = V_0u(t)$ et une perturbation nulle. En déduire si le système est précis.

Réponse 10 : L'entrée s'écrit $V_c(p) = V_0/p$ et la sortie $V(p) = \frac{K}{1+\tau p}\frac{V_0}{p}$. Par le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{p\to 0} pV(p) = KV_0 \neq V_0 \quad \text{car } K \neq 1.$$

Le système n'est donc pas précis : il ne converge pas vers la valeur consigne.

Question 11 : Avec un correcteur intégral pur $C(p) = \frac{K_i}{p}$, où $K_i = 0,01$, déterminer les nouvelles performances de stabilité et de précision.

Réponse 11 : La fonction de transfert en boucle fermée devient

$$\text{FTBF}(p) = \frac{C(p)K_m\dfrac{1}{mp+f}}{1+C(p)K_m\dfrac{1}{mp+f}K_c} = \frac{K_mK_i}{p(mp+f)+K_mK_i} = \frac{1}{1+\dfrac{f}{K_mK_i}p+\dfrac{m}{K_mK_i}p^2}.$$

Tous les coefficients du dénominateur sont de même signe : le système reste stable. De plus,

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{p\to 0} pV(p) = V_0.$$

Le système devient précis avec ce correcteur.

Les questions suivantes font références au cours C04-01 sur les systèmes du premier ordre.

Question 12 : À partir de l'ordre de la fonction de transfert, indiquer si le système présente des dépassements pour une entrée en échelon.

Réponse 12 : Un système du premier ordre ne présente pas de dépassements pour une entrée en échelon : ce critère du cahier des charges est satisfait.

Question 13 : Déterminer le temps de réponse à 5 % et comparer la valeur obtenue à celle exigée au cahier des charges.

Réponse 13 : Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5 % vaut 3τ, soit

$$t_{5\%} = \frac{3m}{f + K_m K_p} = 17{,}4\,\text{s}.$$

Cette valeur est inférieure aux 20 s exigées : le critère de rapidité est satisfait.