# TD03-02 - correction

## 1 | Modélisation de la fonction "convertir l'énergie" de la transmission à variation continue Vario-Fendt

### 1.1 Contexte

Les tracteurs de la gamme Fendt 900 Vario sont équipés d'une transmission à variation continue. Ce dispositif permet de régler la vitesse de façon continue sans à-coups et d'exploiter au mieux les capaci-tés du moteur thermique quelle que soit la configuration de travail. Pour cela le tracteur est équipé d'un groupe hydraulique constitué d'un arbre de commande, de deux moteurs hydrauliques ainsi que d'une pompe à débit variable. Les moteurs hydrauliques ne font pas l'objet de cette étude.



La structure de la transmission est donné sur la Figure 1

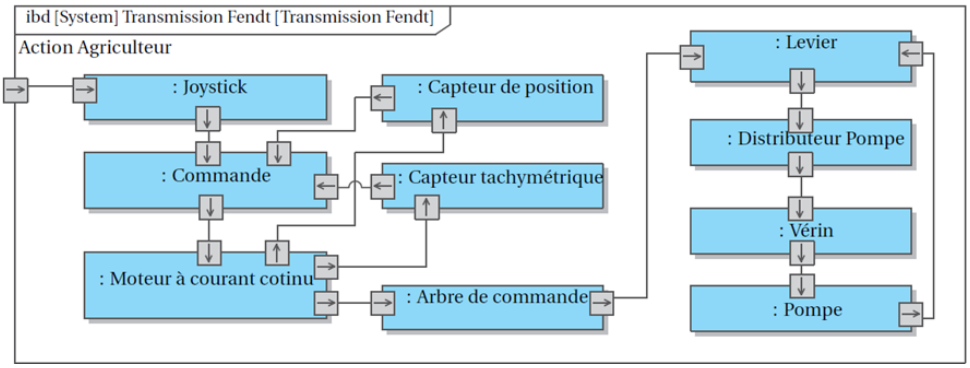



Figure 1 – Diagramme des blocs internes

Afin de régler le débit de la pompe, on actionne un arbre de commande à l'aide d'un moteur à courant continue.
L'objectif de cette étude est de modéliser le comportement d'un moteur à courant continu en le schématisant par un schéma bloc.

### 1.2 Première modélisation

Le fonctionnement d'un moteur continu peut être modélisé par les 4 équations suivantes :

- Loi d'Ohm dans le circuit induit

$$u(t) = e(t) + R \times i(t) \tag{1}$$

- Équation de la dynamique de l'arbre moteur

$$J \times \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \tag{2}$$

- Équations électromécaniques

$$e(t) = K_E \times \omega_m(t) \tag{3}$$

$$c_m(t) = K_c \times i(t) \tag{4}$$

Avec

- $u(t)$ la tension d'alimentation du moteur (en $V$)
- $i(t)$ le courant consommé par le moteur (en $A$)
- $e(t)$ la tension contre-électromotrice (en $V$)
- $R$ la résistance de l'induite (en $\Omega$)
- $K_E$ la constante de force contre-électromotrice (en $V/(rad/s)$)
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation de l'arbre moteur (en $rad/s$)
- $c_m(t)$ le couple exercé par le moteur (en $N.m$)
- $J$ moment d'inertie de l'axe moteur (en $kg.m^2$)
- $K_c$ la constante de couple (en $N.m/A$)

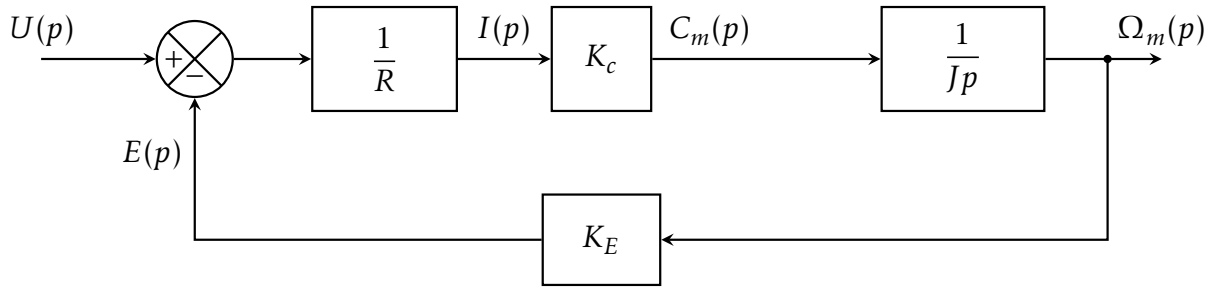
**Question 1 :** Traduire les équations dans le domaine de Laplace. On supposera que les conditions d'Heaviside sont respectées.

**Réponse 1 :**

$$U(p) = E(p) + R \times I(p)$$
$$J \times p\Omega_m(p) = C_m(p)$$
$$E(p) = K_E \times \Omega_m(p)$$
$$C_m(p) = K_c \times I(p)$$

**Question 2 :** Compléter le schéma-bloc du document réponse 1 permettant de modéliser le moteur.

**Réponse 2 :**




**Question 3 :** Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$. La mettre sous forme canonique.

**Réponse 3 :** On a $FTCD = \dfrac{K_c}{RJp}$ et $FTCR = K_E$.

D'après la formule de Black :

$$H(p) = \frac{\dfrac{K_c}{RJp}}{1 + \dfrac{K_c K_E}{RJp}} = \frac{K_c}{RJp + K_c K_E}$$

Soit $\boxed{H(p) = \dfrac{1}{K_E} \dfrac{1}{1 + \dfrac{RJ}{K_E Kc} p}}$.

### 1.3 Seconde modélisation

Un moteur à courant continu peut être modélisé de manière plus précise grâce aux équations suivantes :

- Loi d'Ohm dans le circuit induit

$$u(t) = e(t) + R \times i(t) + L \times \frac{di(t)}{dt} \tag{5}$$

- Équation de la dynamique de l'arbre moteur

$$J \times \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - f_v \times \omega_m(t) - c_r(t) \tag{6}$$

- Équations électromécaniques

$$e(t) = K_E \times \omega_m(t) \tag{7}$$

$$c_m(t) = K_c \times i(t) \tag{8}$$

Avec

- $L$ l'inductance de l'induit (en $H$)
- $c_r(t)$ le couple résistant de l'axe moteur (en $N.m$)
- $f_v$ le coefficient de frottement « fluide » total (en $N/m/(rad/s)$)

**Question 4 :** Traduire les équations dans le domaine de Laplace. On supposera que les conditions d'Heaviside sont respectées.

**Réponse 4 :**

$$U(p) = E(p) + R \times I(p) + L \times pI(p) \tag{9}$$

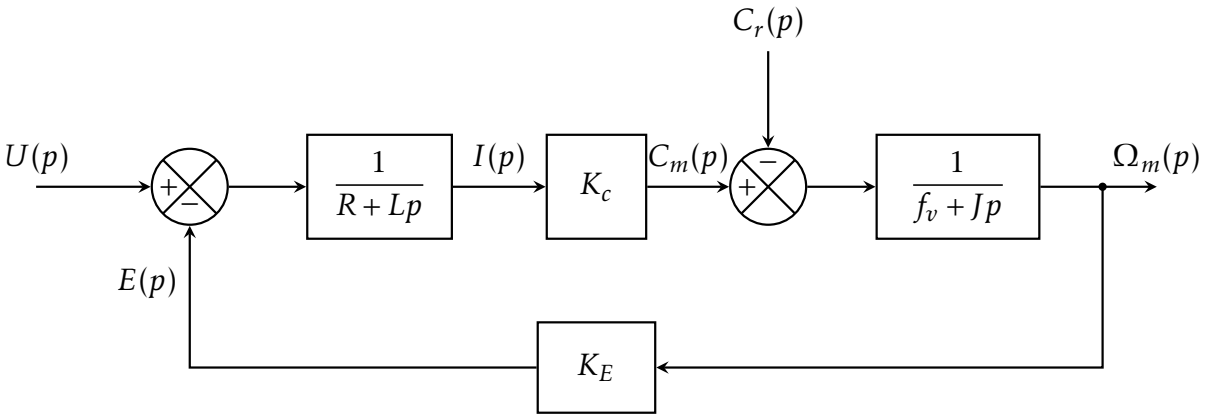
$$J \times p\Omega_m(p) = C_m(p) - f_v \times \Omega_m(p) - C_r(p) \tag{10}$$

$$E(p) = K_E \times \Omega_m(p) \tag{11}$$

$$C_m(p) = K_c \times I(p) \tag{12}$$

**Question 5 :** Compléter le schéma-bloc du document réponse 2 permettant de modéliser le moteur.

**Réponse 5 :**




**Question 6 :** Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ sans perturbation, c'est à dire $C_r(p) = 0$.

**Réponse 6 :** Quand $C_r(p) = 0$, on a $FTCD = \frac{K_c}{(R+Lp)(f_v+JP)}$ et $FTCR = K_E$. D'après la formule de Black :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_c}{(R+Lp)(f_v+Jp)}}{1 + \frac{(K_cK_E)}{(R+Lp)(f_v+Jp)}} = \frac{K_c}{(R+Lp)(f_v+Jp)+K_cK_E}$$

Soit sous forme canonique $\boxed{H_1(p) = \frac{K_c}{K_EK_c+Rf_v} \frac{1}{1 + \frac{RJ+Lf_v}{K_EK_c+Rf_v}p + \frac{LJ}{K_EK_c+Rf_v}p^2}}$.

### 1.4 Bilan

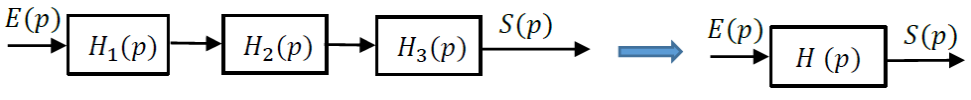
**Question 7 :** Comparer les deux modélisations en utilisant le tableau du document réponse 3.
**Réponse 7 :**

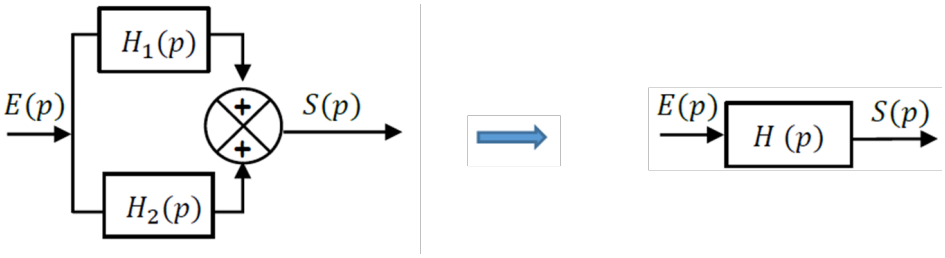
| | Gain | Ordre | Classe | Prise en compte de perturbation |
|---|---|---|---|---|
| $1^{ère}$ modélisation | $\frac{1}{K_E}$ | 1 | 0 | non |
| $2^{nd}$ modélisation | $\frac{K_c}{K_E K_c + R f_v}$ | 2 | 0 | oui |

## 2 Manipulation de schéma bloc

### 2.1 Opération de base

**Question 8 :** Déterminer $H(p)$ pour les cas suivants.

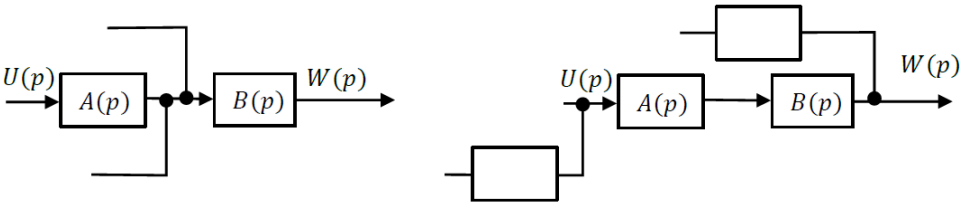


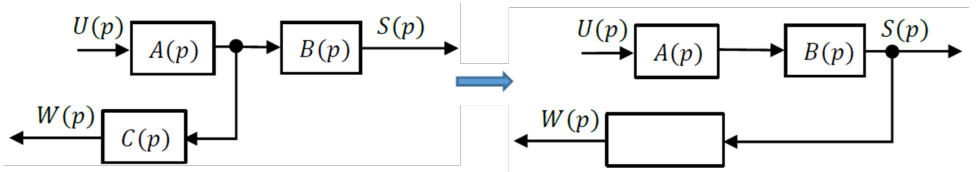



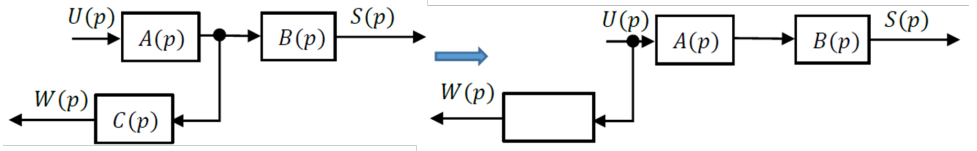

**Réponse 8 :** En série : $H(p) = H_1(p).H_2(p).H_3(p)$.
En parallèle : $H(p) = H_1(p) + H_2(p)$.

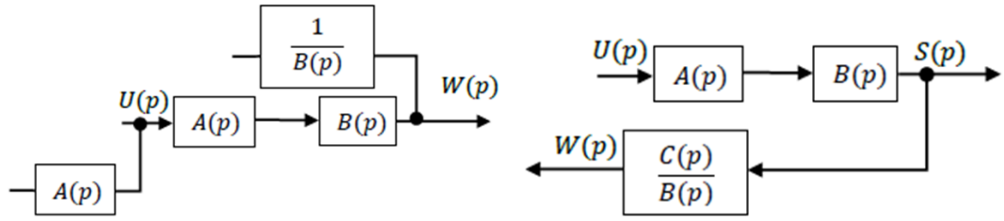
### 2.2 Déplacements

**Question 9 :** Pour les trois cas suivants, compléter les blocs vides.

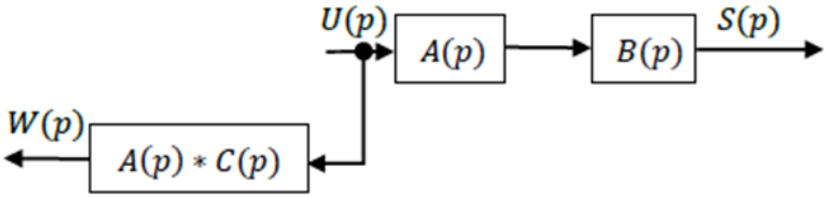





**Réponse 9 :**



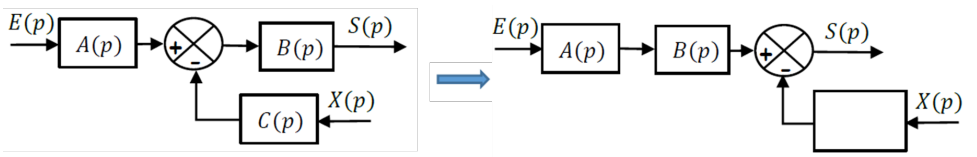

**Question 10 :** Déterminer $W(p)$ puis remplir les signes des sommateurs afin d'obtenir la même expression pour $W(p)$.

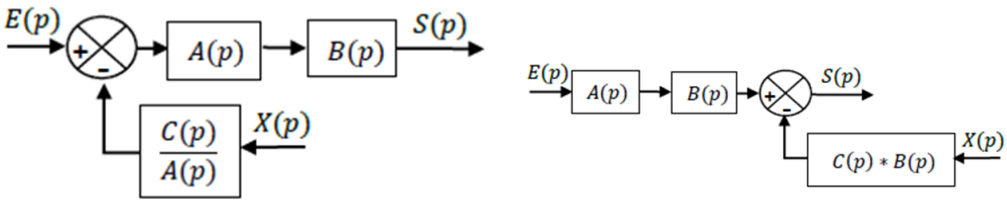



**Réponse 10 :** $W(p) = U(p) - V(p) + X(p)$. Les sommes étant commutatives, il suffit de mettre des signes + pour $U(p)$ et $X(p)$ et un signe - pour $V(p)$.

**Question 11 :** Pour les cas suivants, compléter les blocs vides.

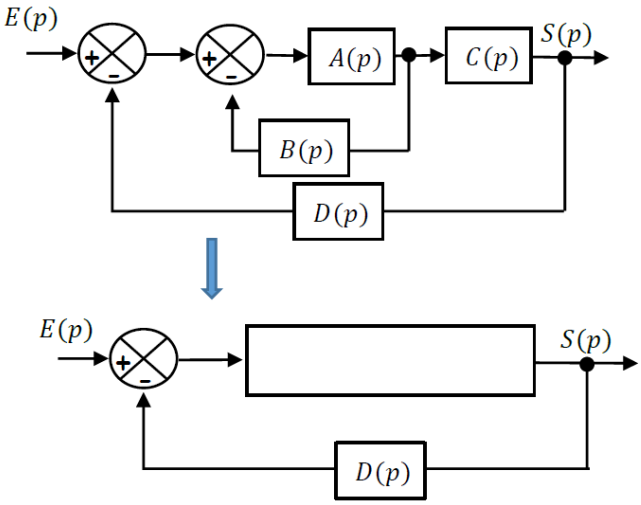





**Réponse 11 :**

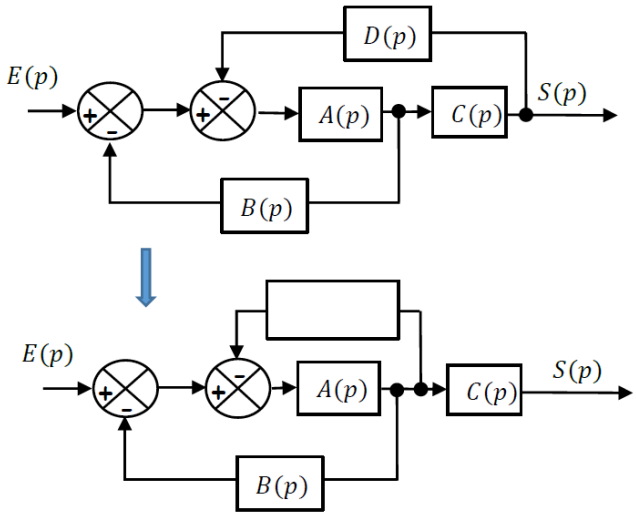
## 2.3 Simplification de boucles concentriques




**Question 12 :** compléter la chaîne directe du schéma bloc précédent, issu de la simplification de la boucle interne.

**Réponse 12 :** La formule de Black donne : $FTCD(p) = \dfrac{A(p).C(p)}{1 + A(p)B(p)}$.

## 2.4 Simplification de boucles imbriquées

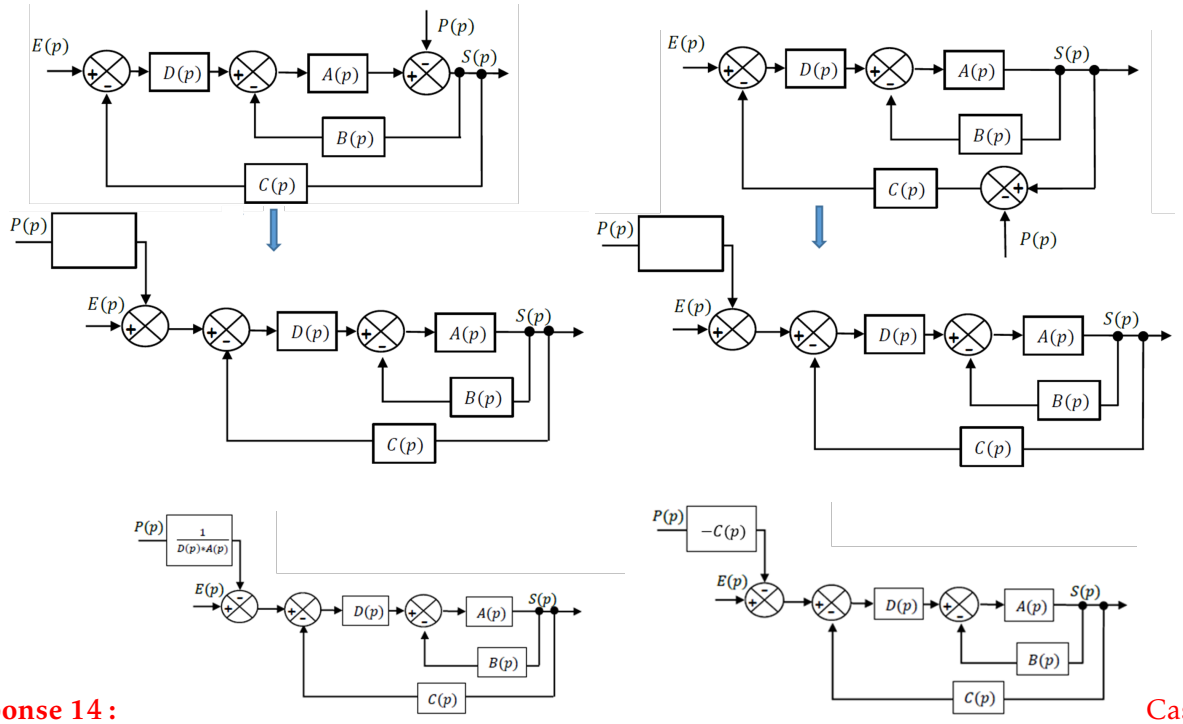



**Question 13 :** Compléter le schéma bloc précédent afin de désimbriquer les boucles.

**Réponse 13 :** Le retour était multiplié par $C(p)$, il doit le reste : $D(p).C(p)$

## 2.5 Perturbation

**Question 14 :** Pour les deux cas suivants, déterminer la modification à apporter à la perturbation suite à son déplacement puis déterminer l'expression de $S(p)$.

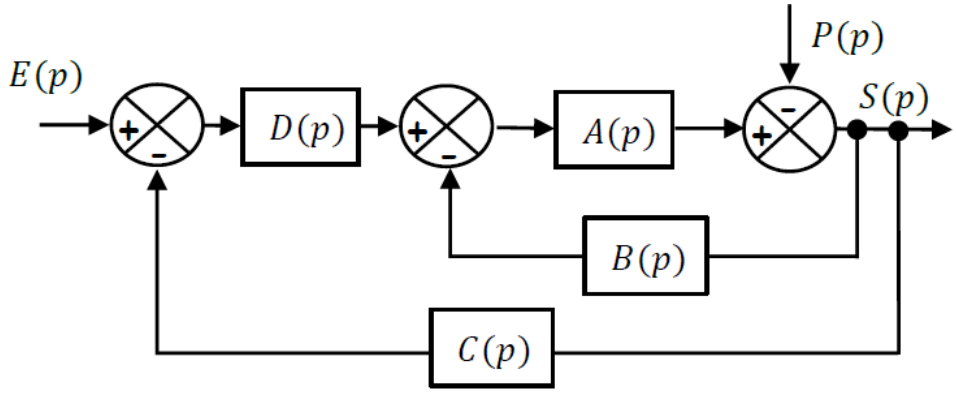



**Réponse 14 :** Cas de gauche : $S(p) = \dfrac{D(p).A(p)}{1 + A(p).B(p) + D(p).A(p).C(p)} \left( E(p) - P(p) \dfrac{1}{D(p).A(p)} \right)$.

Cas de droite : $S(p) = \dfrac{D(p).A(p)}{1 + A(p).B(p) + D(p).A(p).C(p)} (E(p) + P(p).C(p))$.

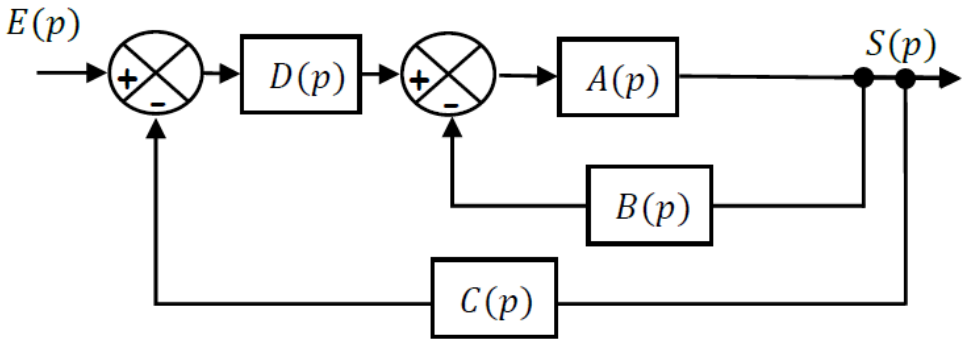
## 2.6 Principe de superposition

D'après le principe de superposition $S(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)P(p)$.

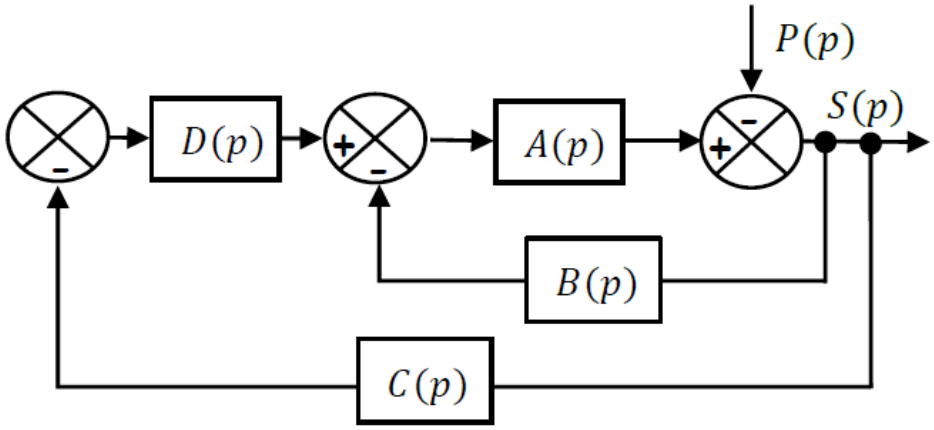



**Question 15 :** En utilisant le principe de superposition, déterminer les expressions de $H_1(p)$ puis de $H_2(p)$.

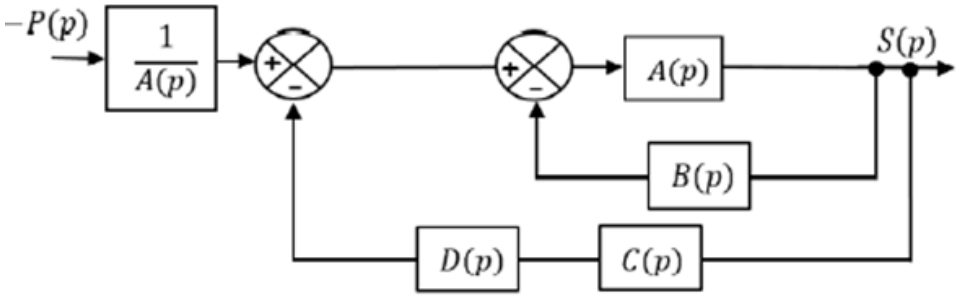
**Réponse 15 :** Afin de déterminer $H_1(p)$, on prend $P(p) = 0$. Le schéma devient :




Après deux formules de Black successives, il vient :
$H_1(p) = \dfrac{D(p).A(p)}{1 + A(p).B(p) + D(p).A(p).C(p)}$.
On prend ensuite $E(p) = 0$, le schéma bloc devient :

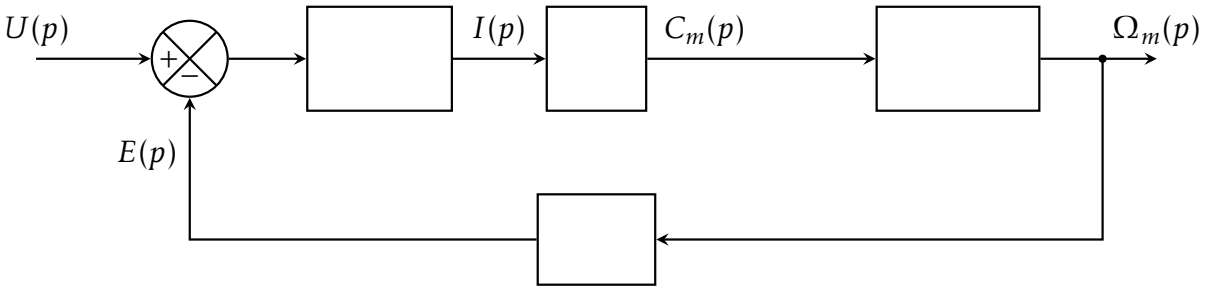



En replaçant la chaîne directe et la chaîne de retour :

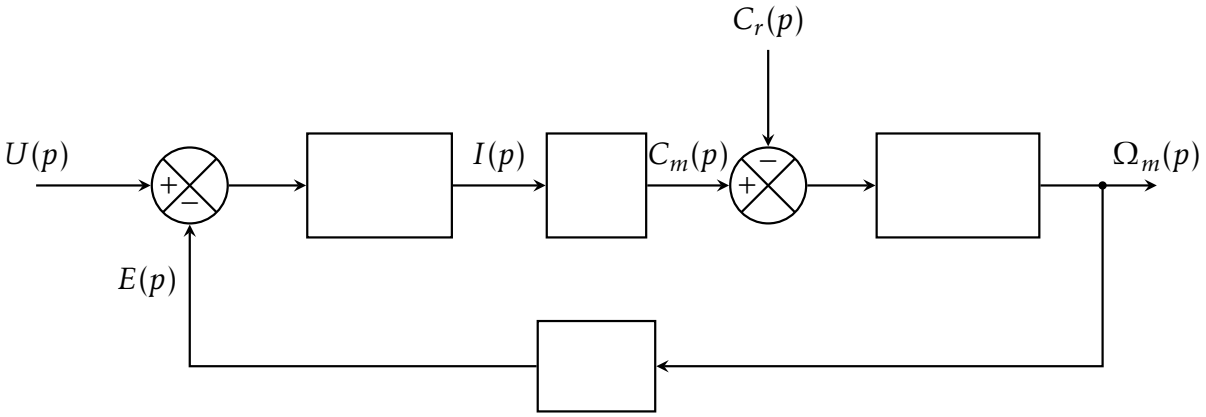



Ainsi $H_2(p) = -\dfrac{1}{1 + A(p).B(p) + D(p).A(p).C(p)}$

**Document Réponse 1 — Tracteur Vario-Fendt — Q. 2**




**Document Réponse 2 — Tracteur Vario-Fendt — Q. 5**




**Document Réponse 3 — Tracteur Vario-Fendt — Q. 7**

| | Gain | Ordre | Classe | Prise en compte de perturbation |
|---|---|---|---|---|
| $1^{ère}$ modélisation | | | | |
| $2^{nd}$ modélisation | | | | |