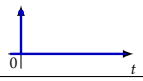
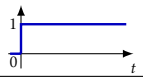
Analyse temporelle des systèmes du premier ordre

Cette séquence est consacrée à l'analyse des réponses temporelles des **systèmes d'ordre simple**, en particulier du **premier et du second ordre**. Il s'agit de soumettre ces systèmes à des **entrées types, souvent l'échelon**, de façon à étudier les propriétés et les **performances du système**. L'objectif est de savoir **relier les performances aux constantes caractéristiques** des fonctions de transfert et évaluer leurs influences.

1 Rappels

Allure	Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
	$t \mapsto \delta(t)$ Impulsion de Dirac	
	$t \mapsto f(t) = u(t)$ Échelon unitaire	
	$t \mapsto f(t) = tu(t)$ Rampe	

Remarque : On en déduit que la dérivée de la rampe est l'échelon et la dérivée de l'échelon est le Dirac.

2 Système proportionnel/intégrateur

2.1 Système à action proportionnelle

Définition

Système à action proportionnelle

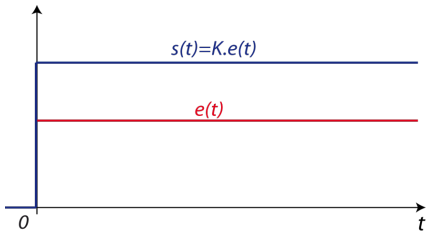
La sortie est **proportionnelle** à l'entrée. On nomme aussi ces systèmes *gains purs* (K est le **gain pur**).

$$s(t) = K\,e(t)$$

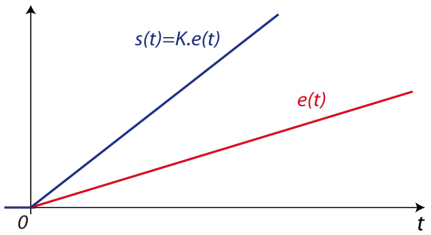
$$s(t) = K\,e(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad S(p) = K\,E(p) \quad \Longrightarrow \quad H(p) =$$



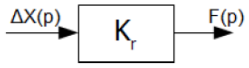
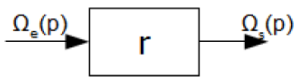
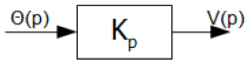
Réponse à un échelon



Réponse à une rampe



Exemple

Ressort	Engrenage	Potentiomètre
		
$F(t) = K_r.\Delta x(t)$	$\omega_s(t) = r.\omega_e(t)$ avec $r = \frac{Z_e}{Z_s}$, et Z_i : nombre de dents	$v(t) = K_p.\theta(t)$
		

2.2 Système intégral

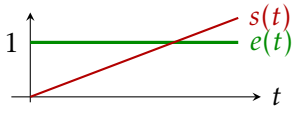
$$s(t) = \int K\, e(t)\, \mathrm{d}t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad S(p) = \frac{K}{p} E(p) \quad \Longrightarrow \quad H(p) =$$



2.2.1 Réponse à une entrée impulsionnelle

	Domaine temporel		Domaine de Laplace
	$e(t) = \delta(t)$	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	

2.2.2 Réponse à une entrée en échelon

	Domaine temporel		Domaine de Laplace
	$e(t) = u(t)$	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	

3 | Système du premier ordre

3.1 Définition

Définition

Système du premier ordre

Le comportement d'un système du premier ordre est caractérisé par une **équation différentielle du premier ordre** à coefficients constants :

$$s(t) + \tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = K\, e(t)$$

On appelle K le **gain statique** et τ la **constante de temps**.
La fonction de transfert d'un système du premier ordre est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Démonstration :
L'appellation *gain statique* est justifiée par le comportement **statique** du système : si l'entrée et la sortie sont constantes, l'équation différentielle devient $s + 0 = Ke$ d'où, en statique, $K = \frac{s}{e}$.
Si les conditions initiales sont nulles (Heaviside), la transformée de Laplace conduit à l'équation :

$$(1 + \tau p)S(p) = KE(p) \iff \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Remarque : Identifier une fonction de transfert du premier ordre revient alors à identifier K et τ.

3.2 Réponse à une entrée impulsionnelle

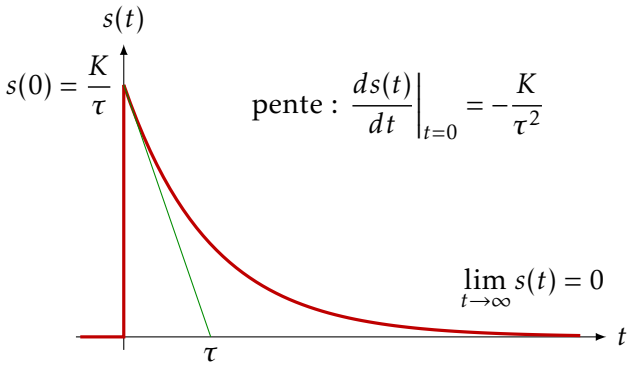
Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction Dirac $e(t) = \delta(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = 1$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) =$$

La **transformée de Laplace inverse** de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. La transformée de Laplace inverse donne alors :

$$s(t) =$$

Il s'agit d'une forme exponentielle convergente décroissante.



3.3 Réponse à une entrée en échelon (le plus courant)

Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction échelon $e(t) = A\,u(t)$ avec $u(t)$ fonction de Heaviside. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \dfrac{A}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) =$$

La **transformée de Laplace inverse** de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Cependant, cette fonction n'a pas de transformée usuelle. Il faut préalablement la **décomposer en éléments simples** :

$$S(p) =$$

$$=$$

$$= \qquad .$$

.

On obtient ainsi :

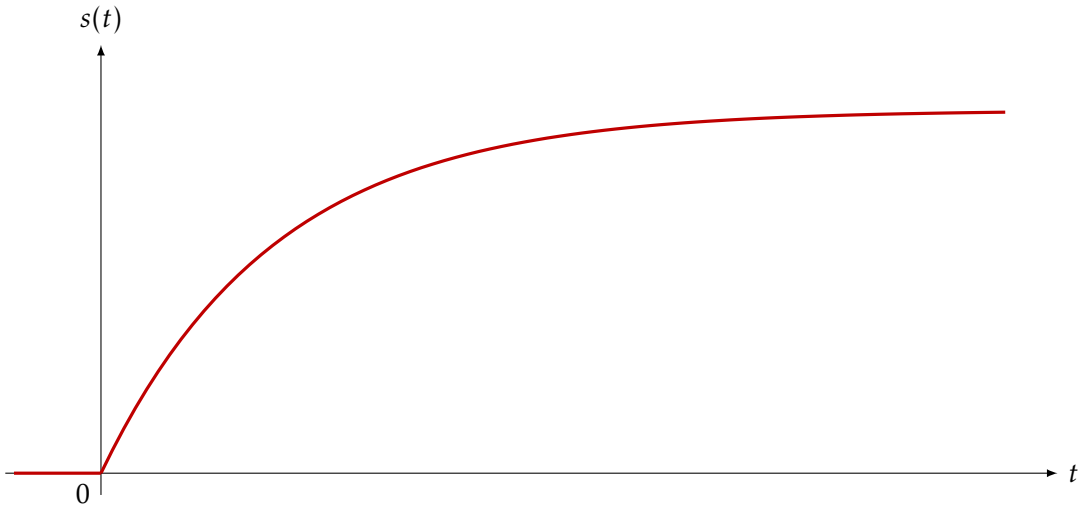
$$S(p) =$$

La transformée de Laplace inverse est alors :

$$s(t) =$$

> **Remarque :** Le Dirac est la dérivée de l'échelon. Comme les systèmes sont linéaires, en dérivant la réponse à un échelon, on retrouve bien la réponse à une entrée impulsionnelle.

Il s'agit d'une forme **exponentielle convergente**.



- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t) \to$ (valeur finale, réponse statique ou permanente).
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$.
- Tangente à l'origine : $\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} =$.
- La tangente à l'origine $\left(y = \frac{KAt}{\tau}\right)$ coupe l'asymptote $(y = KA)$ en .

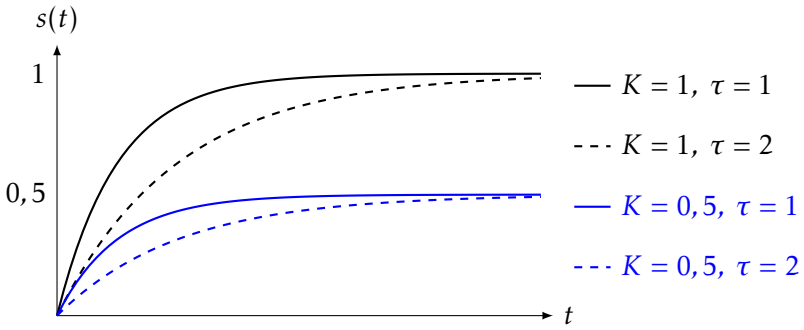
L'application numérique pour les valeurs particulières de t conduit à :

- En $t = \tau$, , soit 63 % de la réponse permanente.
- En $t = 3\tau$, , soit 95 % de la réponse permanente.

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5 % caractérisant la rapidité du système est donc directement lié à τ et vaut 3τ.

3.3.1 Performances premier ordre sollicité par un échelon (à connaitre par coeur)

- **La réponse d'un système du 1er ordre est toujours non oscillante, la sortie d'un système du 1er ordre ne présente donc jamais de dépassements. La pente à l'origine est non nulle.**
- **Si τ est positif, le système est stable.**
- **Si $K = 1$, le système est précis par rapport à une entrée en échelon.**
- **Le temps de réponse à 5% vaut** 3τ**.** Ainsi, plus τ est petit plus le système est rapide.



3.3.2 Identification d'un modèle du premier ordre

L'identification de modèle consiste à proposer un modèle théorique à partir de la **réponse** d'un système **mesurée expérimentalement** suite à la sollicitation par une entrée type. Le modèle obtenu est appelé **modèle de comportement** puisqu'il traduit le comportement observé en sortie, sans se préoccuper du fonctionnement interne contrairement au **modèle de connaissance**. Ce dernier est celui obtenu grâce aux **équations physiques** décrivant le comportement d'un composant.

En pratique, il ne sera demandé d'**identifier** des modèles uniquement **pour des entrées en échelon**.

On pourra considérer que le système étudié est du premier ordre si **sa tangente à l'origine est non nulle**, qu'il ne présente pas d'oscillations et que l'allure de la réponse est celle d'une exponentielle.

Les paramètres caractéristiques K et τ peuvent alors être identifiés sur la courbe mesurée :

- K par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut KA, où A est l'amplitude de l'échelon ;
- τ en utilisant :

- ◇ un tracé graphique : la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$;
- ◇ un calcul de valeur :
  - ○ le temps où la courbe atteint 63% de la valeur finale vaut τ ;
  - ○ le temps où la courbe atteint 95% de la valeur finale vaut 3τ ;
  - ○ le temps où la courbe atteint 99% de la valeur finale vaut 5τ.

Remarque : La méthode de la tangente est la plus rapide graphiquement. Cependant, elle est n'est pas très précise. Non seulement le tracé peut faire beaucoup varier le résultat mais il faut aussi que les données expérimentales soient bien propres (bien lisses). Il peut être pertinent d'utiliser les deux méthodes.

3.4 Réponse à une entrée en rampe

Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction rampe $e(t) = A\,t\,u(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \dfrac{A}{p^2}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{KA}{p^2(1+\tau p)}$$

La **transformée de Laplace inverse** de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Cependant, cette fonction n'a pas de transformée usuelle. Il faut préalablement la **décomposer en éléments simples** :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{KA}{p^2(1+\tau p)} = \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{1+\tau p} \\ &= \frac{\alpha(1+\tau p) + \beta p(1+\tau p) + \gamma p^2}{p^2(1+\tau p)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = KA, \\ \beta = -KA\tau, \\ \gamma = KA\tau^2. \end{cases} \end{aligned}$$

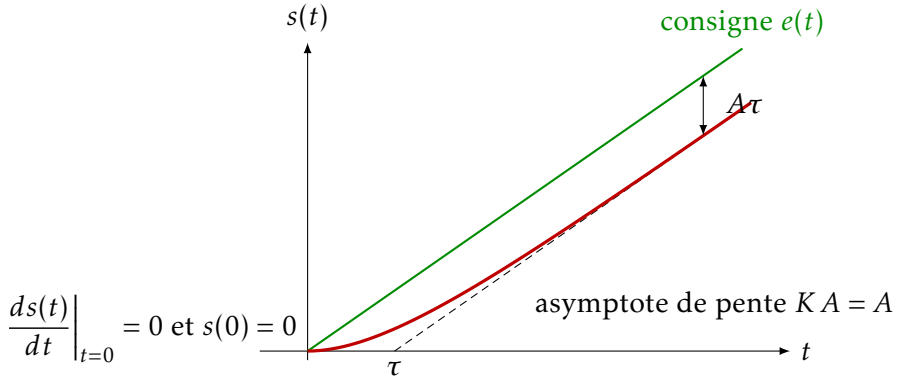
On obtient ainsi :

$$S(p) = KA\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)$$

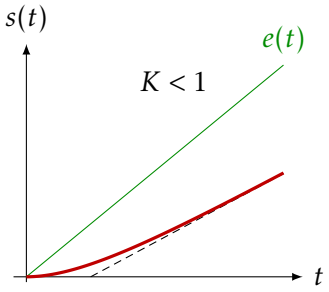
La transformée de Laplace inverse est alors :

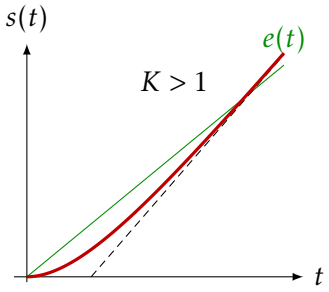
$$\boxed{s(t) = KAu(t)\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right)}$$

Dans le cas où $K = 1$:



Dans les autres cas :



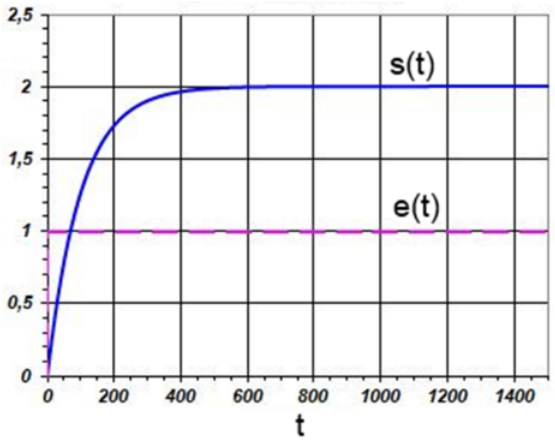


- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t)$ suit une asymptote de pente KA.
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$.
- Tangente à l'origine : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
- L'asymptote coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.
- Dans le cas où $K = 1$, l'erreur de traînage vaut $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to+\infty} |e(t) - s(t)| = A\tau$.

Pour un système du premier ordre, la réponse à une pente est stable mais pas précise.

4 | Applications – identification

Question 1 : Identifier les fonctions de transferts à partir des réponses temporelles suivantes. *Les temps sont en seconde.*



$\boldsymbol{e(t) = 2u(t)}$ avec $u(t)$ échelon indiciel

