
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°3

Combinaisons avec répétition

1. Soit $E = \{a, b, c\}$.

- Pour $p = 1$, les 1-combinaisons de E avec répétition sont

$$\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle.$$

On a donc $\Gamma_3^1 = 3$.

- Pour $p = 2$, les 2-combinaisons de E avec répétition sont

$$\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle.$$

On a donc $\Gamma_3^2 = 6$.

- Pour $p = 3$, les 3-combinaisons de E avec répétition sont

$$\langle a, a, a \rangle, \langle a, a, b \rangle, \langle a, a, c \rangle, \langle a, b, b \rangle, \langle a, b, c \rangle,$$

$$\langle a, c, c \rangle, \langle b, b, b \rangle, \langle b, b, c \rangle, \langle b, c, c \rangle, \langle c, c, c \rangle.$$

On a donc $\Gamma_3^3 = 10$.

2. Comptons tout d'abord le nombre de dominos pour lesquels les deux nombres sont différents. Pour cela, il faut choisir 2 nombres parmi 7 (les nombres entre 0 et 6). Il y a donc $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ façons de choisir de tels dominos.

Il faut ensuite ajouter les 7 dominos qui contiennent deux fois le même nombre (double 0, double 1, ... double 6).

Il y a donc 28 dominos dans un jeu de dominos.

Ceci correspond exactement au nombre de 2-combinaisons avec répétition dans un ensemble à 7 éléments donc $\Gamma_7^2 = 28$.

3. • Une application strictement croissante est nécessairement injective. Or, il existe une application injective de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si $p \leq n$.

Donc si $p > n$, il n'y a pas d'application strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

D'autre part, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ donc dans ce cas, le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ vaut bien $\binom{n}{p}$.

- Supposons dorénavant que $p \leq n$. Dénombrons le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il faut donc fixer les images $f(1), f(2), \dots, f(p)$ telles que $f(1) < f(2) < \dots < f(p)$.

Pour cela, il suffit de considérer une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à p éléments (il y a $\binom{n}{p}$ façons de le faire) qui va constituer l'image de la fonction. Notons-la $\text{Im}(f) = \{x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_1 < \dots < x_p$.

Puisque f doit être strictement croissante, il faut poser $f(k) = x_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
On a alors bien $f(1) = x_1 < f(2) = x_2 < \dots < f(p) = x_p$.
Ainsi, la donnée d'une application strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ équivaut à la donnée d'une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à p éléments. Il y a donc dans ce cas encore $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Dans tous les cas, il y a bien $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

4. • Montrons que g est strictement croissante.

Soient k et l deux entiers dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $k < l$. Montrons que $g(k) < g(l)$.

On a $g(l) - g(k) = f(l) + l - 1 - (f(k) + k - 1) = f(l) - f(k) + l - k$.

Puisque f est croissante et que $k < l$, alors $f(k) \leq f(l)$, i.e. $f(l) - f(k) \geq 0$ d'où $g(l) - g(k) \geq l - k$.

Or, $l - k > 0$ donc $g(l) - g(k) > 0$, ce qui prouve que $g(k) < g(l)$.

Ainsi, l'application g est bien strictement croissante.

• Montrons que g est à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors $0 \leq k - 1 \leq p - 1$.

Puisque f est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $1 \leq f(k) \leq n$.

Par somme de ces inégalités, on obtient $1 \leq f(k) + k - 1 \leq n + p - 1$, i.e. $g(k) \in \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

L'application g est donc bien strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

5. (a) Soit $g \in F$. On suppose qu'il existe $f \in E$ telle que $\varphi(f) = g$.

Par définition de φ , ceci implique que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g(k) = f(k) + k - 1$ donc

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(k) = g(k) - k + 1.$$

(b) Soit $g \in F$.

Soit f définie sur $\llbracket 1, p \rrbracket$ par $f(k) = g(k) - k + 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Puisque g est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors f est également à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Montrons que f est croissante sur $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, $f(k) \leq f(k + 1)$.

Soit $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$.

On a $f(k + 1) - f(k) = g(k + 1) - (k + 1) + 1 - (g(k) - k + 1) = g(k + 1) - g(k) - 1$.

Or, l'application g est strictement croissante donc $g(k + 1) > g(k)$, ce qui implique que $g(k + 1) \geq g(k) + 1$ puisque g est à valeurs entières.

On en déduit que $g(k + 1) - g(k) - 1 \geq 0$, ce qui prouve que $f(k + 1) - f(k) \geq 0$, i.e. $f(k) \leq f(k + 1)$.

On a bien montré que l'application f est croissante sur $\llbracket 1, p \rrbracket$.

(c) Puisque f est croissante, alors pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(1) \leq f(k) \leq f(p)$.

Or, $f(1) = g(1) - 1 + 1 = g(1) \geq 1$ car g est à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

De même, $f(p) = g(p) - p + 1$. Or g est à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ donc $g(p) \leq n + p - 1$ d'où $g(p) - p + 1 \leq n$.

Finalement, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 \leq f(1) \leq f(k) \leq f(p) \leq n$ donc

l'application f est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(d) Soit $g \in F$. D'après les deux questions précédentes, l'application f définie sur $\llbracket 1, p \rrbracket$ par $f(k) = g(k) - k + 1$ est croissante et à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $f \in E$.

De plus, on a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(k) + k - 1 = g(k)$ donc $g = \varphi(f)$.

Autrement dit, toute application $g \in F$ admet un antécédent $f \in E$ par φ , donc φ est surjective.

Par ailleurs, d'après la question 5.(a), si g admet un antécédent f par φ , alors l'expression de f est nécessairement $f(k) = g(k) - k + 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Autrement dit, si g admet un antécédent par φ , alors cet antécédent est unique, ce qui prouve que φ est injective.

Finalement, φ est bien bijective.

- (e) Puisque $\varphi : E \rightarrow F$ est une application bijective entre deux ensembles finis, alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Or, d'après la question 3., le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ est $\binom{n + p - 1}{p}$.

Il y a donc $\binom{n + p - 1}{p}$ applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

6. (a) • Soit f une application croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\langle f(1), \dots, f(p) \rangle$ est une p -combinaison avec répétition (puisque l'application f n'est pas nécessairement strictement croissante) d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

• Réciproquement, considérons une p -combinaison avec répétition d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Rangeons-la par ordre croissant et notons-la $\langle x_1, \dots, x_p \rangle$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$.

Alors l'application
$$\begin{array}{ccc} f : \llbracket 1, p \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ k & \longmapsto & x_k \end{array}$$
 est croissante car pour tout couple d'entiers $(k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, si $k \leq l$, alors $f(k) = x_k \leq x_l = f(l)$.

Ainsi, on a bien montré que toute application croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ correspond à une unique p -combinaison avec répétition d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Il y a donc autant d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ que de p -combinaisons avec répétition d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- (b) D'après la question 5.(e), on en déduit que

$$\Gamma_n^p = \binom{n + p - 1}{p}.$$

Pour $p = 2$ et $n = 7$, on retrouve que $\Gamma_7^2 = \binom{7 + 2 - 1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$.

- (c) Le résultat (non ordonné) d'un lancer de trois dés à 6 faces identiques revient à se donner une 3-combinaison avec répétition de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

$$\text{Or, } \Gamma_6^3 = \binom{6 + 3 - 1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56.$$

Il y a donc 56 tirages non ordonnés possibles.

7. (a) Soit m un entier naturel non nul fixé.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^k \binom{m + i - 1}{i} = \binom{m + k}{k}$.

• **Initialisation** : Pour $k = 0$, on a $\sum_{i=0}^0 \binom{m + i - 1}{i} = \binom{m - 1}{0} = 1$ (on a bien $m - 1 \in \mathbb{N}$ car $m \in \mathbb{N}^*$).

D'autre part, $\binom{m+0}{0} = 1$ donc on a bien $\sum_{i=0}^0 \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+0}{0}$, ce qui prouve la propriété au rang $k = 0$.

• **Hérédité** : Soit k un entier naturel fixé tel que $\sum_{i=0}^k \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}$.

Montrons la propriété au rang $k+1$, i.e. vérifions que $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k+1}{k+1}$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{m+i-1}{i} &= \sum_{i=0}^k \binom{m+i-1}{i} + \binom{m+k+1-1}{k+1} \\ &= \binom{m+k}{k} + \binom{m+k}{k+1} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\ &= \binom{m+k+1}{k+1} \quad (\text{Relation de Pascal}) \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

La formule est donc vraie pour tout entier naturel k et pour tout entier naturel m non nul (puisque celui-ci a été fixé arbitrairement).

On a donc bien $\forall (m, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \sum_{i=0}^k \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}$.

(b) Puisque $\binom{n+0-1}{0} = 1$, on a bien vu la convention de l'énoncé $\Gamma_n^0 = \binom{n+0-1}{0}$.

On a alors $\sum_{k=0}^p \Gamma_n^k = \sum_{k=0}^p \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+p}{p}$ d'après la question précédente.

Or, d'après la question 6.(b), $\Gamma_{n+1}^p = \binom{n+1+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$.

On a donc bien montré que $\sum_{k=0}^p \Gamma_n^k = \Gamma_{n+1}^p$.

(c) Soit E un ensemble à $n+1$ éléments, soit a un élément fixé dans E .

On veut dénombrer le nombre de p -combinaisons avec répétition de E . Par définition, il y en a Γ_{n+1}^p .

Le nombre de p -combinaisons avec répétition de E ne contenant pas a vaut Γ_n^p (en effet, il faut choisir les p éléments de la combinaison parmi les n autres éléments de E .)

Le nombre de p -combinaisons avec répétition de E contenant une seule fois a vaut Γ_n^{p-1} (en effet, il faut choisir les $p-1$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E .)

Le nombre de p -combinaisons avec répétition de E contenant deux fois a vaut Γ_n^{p-2} (en effet, il faut choisir les $p-2$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E .)

Plus généralement, pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, le nombre de p -combinaisons avec répétition de E contenant i fois a vaut Γ_n^{p-i} (en effet, il faut choisir les $p-i$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E .)

Ceci couvre tous les cas possibles donc

$$\Gamma_{n+1}^p = \sum_{i=0}^p \Gamma_n^{p-i}.$$

En posant le changement d'indice $k = p - i$, on retrouve bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^p \Gamma_n^k = \Gamma_{n+1}^p.}$$

8. • Montrons qu'il y a auant de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p \leq n$ que d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ un tel p -uplet. Puisque les x_k sont des entiers naturels dont la somme est inférieure ou égale à n , on a nécessairement pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ce p -uplet mène naturellement à l'application f suivante :

$$\begin{array}{ccc} f : \llbracket 1, p \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n+1 \rrbracket \\ k & \longmapsto & 1 + \sum_{i=1}^k x_i. \end{array}$$

L'application f est bien croissante car pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $f(k+1) - f(k) = x_{k+1} \geq 0$

et elle est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ car pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{i=1}^k x_i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Réciproquement, considérons une application $f : \llbracket 1, p \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ croissante. Déduisons-en un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p \leq n$.

Considérons le p -uplet $(x_1, \dots, x_p) = (f(1) - 1, f(2) - f(1), \dots, f(p) - f(p-1))$.

Tout d'abord, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a bien $x_k \geq 0$ car $f(1) \geq 1$ et pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $x_k = f(k) - f(k-1) \geq 0$ puisque l'application f est croissante.

De plus, on a $\sum_{k=1}^p x_k = f(p) - 1 \leq n$ car $f(p) \leq n+1$.

Il y a donc autant de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p \leq n$ que d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Or, d'après la question 5.e), il y a $\binom{n+1+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$ applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On en déduit qu'il y a $\binom{n+p}{p}$ tels p -uplets.

- Dénombrons désormais les p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p = n$.

Il suffit de retirer au nombre trouvé précédemment le nombre de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p \leq n-1$.

D'après la question précédente, il y en a $\binom{n-1+p}{p}$.

Le nombre de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \dots + x_p = n$ vaut donc

$$\binom{n+p}{p} - \binom{n-1+p}{p} = \binom{n-1+p}{p-1}$$

d'après la formule de Pascal.

On en déduit qu'il y a $\binom{n+p-1}{p-1}$ tels p -uplets.

9. Notons les tiroirs de 1 à b . Le rangement des a chaussettes peut s'exprimer par une a -combinaison à répétition de l'ensemble $\llbracket 1, b \rrbracket$ constituée de tous les numéros de tiroirs (avec répétition éventuellement) dans lesquels sont rangés les a chaussettes.

Il y a donc Γ_b^a rangements possibles.