

Exercice 1 : Méthode de Cardan

Partie I : Préliminaires

1. On a $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \frac{z^3}{z_0^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$.

Or, puisque $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, ceci équivaut à $\frac{z}{z_0} \in \{1, j, j^2\}$.

Ainsi, $\frac{z}{z_0} = 1$ ou $\frac{z}{z_0} = j$ ou $\frac{z}{z_0} = j^2$ d'où $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = j^2z_0$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ est $\{z_0, jz_0, j^2z_0\}$.

2. • On a $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$.

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{\frac{i\pi}{9}}, je^{\frac{i\pi}{9}}, j^2e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}}$.

• On a $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$.

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, je^{-\frac{i\pi}{9}}, j^2e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}}$.

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

D'après le théorème sur le signe d'un trinôme du second degré (ici, son coefficient dominant est positif et ses racines sont 1 et 3), on en déduit que

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\text{ et } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$$

donc f est croissante sur $] -\infty, 1[$ et sur $[3, +\infty[$ et décroissante sur $[1, 3]$.

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

En calculant $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les trois intervalles $] -\infty, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$, on en déduit qu'il existe $x_1 \in] -\infty, 1[$, $x_2 \in]1, 3[$ et $x_3 \in]3, +\infty[$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

L'équation (E) admet donc bien trois solutions réelles distinctes.

2. On a $x = z - h$. L'équation (E) devient alors

$$\begin{aligned} (E) : & (z - h)^3 - 6(z - h)^2 + 9(z - h) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 - 3hz^2 + 3h^2z - h^3 - 6z^2 + 12hz - 6h^2 + 9z - 9h - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 + (-3h - 6)z^2 + (3h^2 + 12h + 9)z - h^3 - 6h^2 - 9h - 3 = 0. \end{aligned}$$

En posant $h = -2$, on en déduit que $z = x - 2$ vérifie l'équation

$$(E') : z^3 - 3z - 1 = 0.$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} (u + v)^3 - 3(u + v) - 1 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v - 1 \\ &= U + V + 3u(uv) + 3v(uv) - 3u - 3v - 1 \\ &= 1 + 3u + 3v - 3u - 3v - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $u + v$ est bien racine de (E') .

(b) On a $U + V = 1$ et $UV = u^3v^3 = (uv)^3 = 1$. D'après les relations coefficients-racines, U et V sont racines du trinôme du second degré $X^2 - (U + V)X + UV = 0$, i.e.

$$U \text{ et } V \text{ sont les racines de } X^2 - X + 1 = 0.$$

(c) Le discriminant du trinôme $X^2 - X + 1$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc les racines U et V de ce trinôme sont

$$U = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } V = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On a donc $u^3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

D'après les résultats de la Partie I, les nombres complexes u tels que $u^3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{i\frac{7\pi}{9}}, e^{-i\frac{5\pi}{9}}\}$.

De même, les nombres complexes v tels que $v^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{-i\frac{\pi}{9}}, e^{\frac{5\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$.

Or, on veut que $u + v = 1$ et $uv = 1$.

La condition $uv = 1$ impose le fait que u et v doivent être conjugués.

- Si $\{u, v\} = \{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}$, on a bien $uv = 1$ et d'après la formule d'Euler,

$$U + V = u^3 + v^3 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

- Si $\{u, v\} = \{e^{i\frac{5\pi}{9}}, e^{-i\frac{5\pi}{9}}\}$, on a de même $uv = 1$ et $U + V = u^3 + v^3 = 1$.
 - Enfin, si $\{u, v\} = \{e^{i\frac{7\pi}{9}}, e^{-i\frac{7\pi}{9}}\}$, on a également $uv = 1$ et $U + V = u^3 + v^3 = 1$.
- Finalement, les paires $\{u, v\}$ possibles sont

$$\boxed{\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}, \{e^{i\frac{5\pi}{9}}, e^{-i\frac{5\pi}{9}}\}, \{e^{i\frac{7\pi}{9}}, e^{-i\frac{7\pi}{9}}\}.$$

- (d) D'après la question 3.(a) de la Partie II, si $\{u, v\}$ vérifie (*), alors $u + v$ est racine de (E') .

D'après la question précédente, on obtient trois racines différentes pour (E') :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{9}} + e^{-i\frac{\pi}{9}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right); z_2 = e^{i\frac{5\pi}{9}} + e^{-i\frac{5\pi}{9}} = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); z_3 = e^{i\frac{7\pi}{9}} + e^{-i\frac{7\pi}{9}} = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Elles sont bien différentes car $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$ appartiennent à $[0, \pi]$ et $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$.

Or, une équation de degré 3 admet au plus trois racines complexes.

$$\boxed{\text{Les racines de } (E') \text{ sont donc } \left\{ 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \right\}.$$

4. On a vu en deuxième question de la Partie II que x est racine de (E) si et seulement si $z = x - 2$ est racine de (E') . Ainsi, z est racine de (E') si et seulement si $x = z + 2$ est racine de (E) .

$$\boxed{\text{Les racines de } (E) \text{ sont donc } \left\{ 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2; 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + 2; 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + 2 \right\}.$$

Exercice 2 : Diagonale d'un pentagone régulier

1. (a) On a

$$S = a + a^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

donc $\boxed{S = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ et

$$T = a^2 + a^3 = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^2 + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^3 = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}}$$

d'où $\boxed{T = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$.

- (b) On a $S + T = a + a^2 + a^3 + a^4$. On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une progression géométrique avec $a \neq 1$ donc

$$S + T = \sum_{k=1}^4 a^k = a \frac{1 - a^4}{1 - a} = e^{\frac{2i\pi}{5}} \frac{1 - e^{-\frac{2i\pi}{5}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}}$$

d'où $\boxed{S + T = -1}$.

Par ailleurs, on a

$$ST = (a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^4 + a^6 + a^7.$$

Or, on remarque que $a^6 = e^{\frac{12i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} = a$ et $a^7 = a^6 \times a = a \times a = a^2$ donc $ST = a + a^2 + a^3 + a^4 = S + T$ d'où $\boxed{ST = -1}$.

(c) S et T sont racines du trinôme du second degré $x^2 - (S + T)x + ST = 0$, i.e.

$$\boxed{x^2 + x - 1 = 0}.$$

(d) Calculons les racines du trinôme $x^2 + x - 1 = 0$. On a $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc les racines sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Or, on sait que les racines sont $S = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et puisque $\frac{4\pi}{5} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$.

On en déduit que $S = x_2$ et $T = x_1$ donc $2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ d'où $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$.

Enfin, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$ donc

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \pi[$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

d'où en multipliant par $\sqrt{2}$ au numérateur et au dénominateur, $\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$.

2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a

$$M_k M_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = \left| e^{\frac{2i\pi(k+1)}{5}} - e^{\frac{2ik\pi}{5}} \right| = \left| e^{\frac{2ik\pi}{5}} (e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1) \right| = \left| e^{\frac{2ik\pi}{5}} \right| \left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right| = \left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right|$$

car $\left| e^{\frac{2ik\pi}{5}} \right| = 1$ donc $M_0 M_1 = M_1 M_2 = M_2 M_3 = M_3 M_4 = \left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right|$ et

$$\left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right| = \left| e^{\frac{i\pi}{5}} (e^{\frac{i\pi}{5}} - e^{-\frac{i\pi}{5}}) \right| = \left| e^{\frac{i\pi}{5}} \right| \left| 2i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

De même,

$$M_4 M_0 = |z_0 - z_4| = |1 - (e^{\frac{2i\pi}{5}})^4| = |1 - e^{\frac{8i\pi}{5}}| = |1 - e^{-\frac{2i\pi}{5}}| = \left| e^{-\frac{2i\pi}{5}} (e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1) \right| = \left| e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right| \left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right|$$

d'où $M_4 M_0 = \left| e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1 \right|$ donc $\boxed{M_4 M_0 = M_0 M_1 = M_1 M_2 = M_2 M_3 = M_3 M_4 = L}$ avec

$$L = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a

$$(\overrightarrow{\widehat{OM_k, OM_{k+1}}}) = (\overrightarrow{\widehat{i, OM_{k+1}}}) - (\overrightarrow{\widehat{i, OM_k}}) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) \equiv \frac{2(k+1)\pi}{5} - \frac{2k\pi}{5} \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi]$$

et

$$(\overrightarrow{\widehat{OM_4, OM_0}}) = (\overrightarrow{\widehat{i, OM_0}}) - (\overrightarrow{\widehat{i, OM_4}}) \equiv \arg(z_0) - \arg(z_4) \equiv 0 - \frac{8\pi}{5} \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi].$$

Ainsi,

$$\boxed{(\overrightarrow{\widehat{OM_0, OM_1}}) = (\overrightarrow{\widehat{OM_1, OM_2}}) = (\overrightarrow{\widehat{OM_2, OM_3}}) = (\overrightarrow{\widehat{OM_3, OM_4}}) = (\overrightarrow{\widehat{OM_4, OM_0}}) = \frac{2\pi}{5}.$$

Enfin, pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a

$$(\overrightarrow{\widehat{u, v}}) = (\overrightarrow{\widehat{i, v}}) - (\overrightarrow{\widehat{i, u}}) \equiv \arg(z_v) - \arg(z_u) [2\pi]$$

où z_u et z_v sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$(\overrightarrow{\widehat{M_k M_{k+1}, M_k M_{k-1}}}) \equiv \arg(z_{k-1} - z_k) - \arg(z_{k+1} - z_k) \equiv \arg\left(\frac{z_{k-1} - z_k}{z_{k+1} - z_k}\right) [2\pi].$$

Or, on a

$$\frac{z_{k-1} - z_k}{z_{k+1} - z_k} = \frac{e^{\frac{2i(k-1)\pi}{5}} - e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{e^{\frac{2i(k+1)\pi}{5}} - e^{\frac{2ik\pi}{5}}} = \frac{e^{\frac{2i(k-1)\pi}{5}}}{e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \frac{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = -\frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{e^{i\pi}}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} = e^{\frac{3i\pi}{5}}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $(\overrightarrow{\widehat{M_k M_{k+1}, M_k M_{k-1}}}) = \frac{3\pi}{5}$.

De même,

$$(\overrightarrow{\widehat{M_0 M_1, M_0 M_4}}) \equiv \arg\left(\frac{z_4 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \arg\left(\frac{e^{\frac{8i\pi}{5}} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1}\right) \equiv \arg\left(\frac{e^{-\frac{2i\pi}{5}} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1}\right).$$

$$\text{Or, } \frac{e^{-\frac{2i\pi}{5}} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} \frac{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = -e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{i\pi} e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{3i\pi}{5}} \text{ donc}$$

$$(\overrightarrow{\widehat{M_0 M_1, M_0 M_4}}) = \frac{3\pi}{5}.$$

Enfin,

$$(\overrightarrow{\widehat{M_4 M_0, M_4 M_3}}) \equiv \arg\left(\frac{z_3 - z_4}{z_0 - z_4}\right) \equiv \arg\left(\frac{e^{\frac{6i\pi}{5}} - e^{\frac{8i\pi}{5}}}{1 - e^{\frac{8i\pi}{5}}}\right) \equiv \arg\left(\frac{e^{-\frac{2i\pi}{5}} e^{\frac{8i\pi}{5}} - 1}{1 - e^{\frac{8i\pi}{5}}}\right) \equiv \arg(e^{-\frac{2i\pi}{5}} e^{i\pi}),$$

donc on trouve encore $(\overrightarrow{\widehat{M_4 M_0, M_4 M_3}}) = \frac{3\pi}{5}$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{(\overrightarrow{\widehat{M_0 M_1, M_0 M_4}}) = (\overrightarrow{\widehat{M_1 M_2, M_1 M_0}}) = (\overrightarrow{\widehat{M_2 M_3, M_2 M_1}}) = (\overrightarrow{\widehat{M_3 M_4, M_3 M_2}}) = (\overrightarrow{\widehat{M_4 M_0, M_4 M_3}}) = \frac{3\pi}{5}.$$

(b) Pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on a

$$M_k M_{k+2} = |z_{k+2} - z_k| = |e^{\frac{2i(k+2)\pi}{5}} - e^{\frac{2ik\pi}{5}}| = |e^{\frac{2ik\pi}{5}}(e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1)| = |e^{\frac{2ik\pi}{5}}| |e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1| = |e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1|.$$

$$\text{De même, } M_3 M_0 = |z_3 - z_0| = |e^{\frac{6i\pi}{5}} - 1| = |e^{-\frac{4i\pi}{5}} - 1| = |\overline{e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1}| = |e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1|.$$

$$\text{Enfin, } M_4 M_1 = |z_1 - z_4| = |e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{8i\pi}{5}}| = |e^{\frac{2i\pi}{5}}| |1 - e^{\frac{6i\pi}{5}}| = |e^{\frac{6i\pi}{5}} - 1| = |e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1|. \text{ Or, on a}$$

$$|e^{\frac{4i\pi}{5}} - 1| = |e^{\frac{2i\pi}{5}}(e^{\frac{4i\pi}{5}} - e^{-\frac{2i\pi}{5}})| = |e^{\frac{2i\pi}{5}}| |2i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)| = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

En posant $D = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on a donc bien

$$\boxed{M_0 M_2 = M_1 M_3 = M_2 M_4 = M_3 M_0 = M_4 M_1 = D.}$$

Enfin, calculons $\frac{D}{L}$. On a

$$\frac{D}{L} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

$$\text{Or, d'après la question 1.(d), } 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = T = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\frac{D}{L} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On reconnaît la valeur du nombre d'or φ .

On en conclut que $\boxed{\frac{D}{L} = \varphi.}$

(c) Si la longueur du pentagone L vaut 1, on en déduit que la longueur de la diagonale vaut $\boxed{D = \varphi.}$