

Corrigé de la liste d'exercices n°8

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

La fonction f est définie pour les réels x tels que $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$ donc $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$ qui est symétrique par rapport à l'origine.
Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $-x \in]-1, 1[$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= (1 - (-x)^2) \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \\ &= (1 - x^2)(\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\ &= -(1 - x^2)(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= -(1 - x^2) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc f est impaire.

Exercice 2

1. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$ d'où pour tout réel x , $f'(-x) = -f'(x)$, ce qui prouve que f' est impaire.

2. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-f(x) = f(-x)$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$ d'où pour tout réel x , $f'(-x) = f'(x)$, ce qui prouve que f' est paire.

3. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout réel x , $f(x+T) = f(x)$, i.e. f est T -périodique. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+T)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x+T)$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x) = f'(x+T)$, ce qui prouve que f' est T -périodique.

Exercice 3

1. Pour tout réel x , $f(x) = -x^2 + \pi \leq \pi = f(0)$ donc $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \pi$. En revanche, f n'est pas minorée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel x , $1 \leq 2 - \sin(x) \leq 3$ donc $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1 = f(\frac{\pi}{2})$ donc $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$ et $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$.

3. Pour tout réel x , $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ donc pour tout réel x , $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$ avec égalité pour $x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{4}{3}$ avec égalité si $x = \frac{1}{2}$ donc $\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} = 0$ donc $\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + x + 1} = 0$ (mais ce n'est pas un minimum, car la borne inférieure n'est pas atteinte).

4. Par définition de la partie entière, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$ donc en multipliant par $x > 0$, on obtient

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

Par ailleurs, on a pour tout $x > 0$, $0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$.

On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$ donc $\min_{x > 0} f(x) = 0$ et $\max_{x > 0} f(x) = 1$.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \cos(x) - 3x \sin(x) - \ln(5)5^x$.
2. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + k\frac{\pi}{2}\}$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = e^x + \frac{(\tan(x+1))^7 - 7x(1 + \tan^2(x+1))(\tan(x+1))^6}{(\tan(x+1))^{14}}.$$

3. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f =]0, \frac{\pi}{2}[\cup_{k \in \mathbb{N}^*} [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\cup_{k \in \mathbb{Z}_-} [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{7x^6 \cos(x) - x^7 \sin(x)}{2\sqrt{x^7 \cos(x)}}.$$

4. On a $3x^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{5}{3}}$ ou $x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}[\cup]\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 5}} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 5}} = \frac{6x}{2(3x^2 - 5)}.$$

5. On a $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 4 - x^2 & \text{si } x \in [-2, 2] \end{cases}$. Puisque la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ -2x & \text{si } x \in]-2, 2[. \end{cases}$$

6. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = e^x \ln(\sin(x)) + e^x \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

7. On a $\ln(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ donc f est dérivable sur $]e, +\infty[$ et pour tout $x > e$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \times \frac{1}{x \ln(x)}.$$

8. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ donc

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

9. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$, $f(x) = \sin(x)$ donc $f'(x) = \cos(x)$.

Pour tout $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$, $f(x) = -\sin(x)$ donc $f'(x) = -\cos(x)$.

10. On a $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$,

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

Exercice 5

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^x = e^{x \ln(x)} \end{array}$. On peut en fait prolonger f sur $\mathbb{R}_+$ par continuité car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1)x^x.$$

On a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et atteint son minimum en e^{-1} qui vaut $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} < 1$ car $-e^{-1} < 0$.

Notons que $f(1) = 1$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin^2(x) \end{array}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x + \sin^2(x) \leq x + 1$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

De même, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + \sin(2x) \geq 0$, donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour que $h(x)$ soit défini, il faut que $x+1 \neq 0$ i.e. $x \neq -1$ et $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, i.e. $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Finalement, h est définie sur $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a $h(x) = x\sqrt{u(x)}$ où $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ donc h est dérivable en les points x pour lesquels $u(x) > 0$, i.e. pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,

$$h'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On remarque que pour tout $x > 1$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Soit $x < -1$. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{-x-1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{-x-1}{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1}} + \frac{x\sqrt{-x-1}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(1-x)(x+1)^2 + x(-x-1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)((1-x)(x+1) - x)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)(-x^2 - x + 1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \end{aligned}$$

On a pour tout $x < -1$, $(x+1) < 0$, $-x^2 - x + 1 > 0$ si $x > \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $-x^2 - x - 1 < 0$ si $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, h est strictement croissante sur $\left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1 \right[$.

Notons que $h(1) = 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} x-1 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^-$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$.

Par produit, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty.$$

Exercice 6

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a pour tout $x \neq -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + x \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{(x+1)^2+2x}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+1)^2}\right). \end{aligned}$$

En effet, les racines de $x^2 + 4x + 1$ sont $-2 - \sqrt{3} < -1$ et $-2 + \sqrt{3} > -1$.

On a donc $f'(x) > 0$ si $x < -2 - \sqrt{3}$ et si $x > -2 + \sqrt{3}$ et $f'(x) < 0$ si $-2 - \sqrt{3} < x < -1$ et si $-1 < x < -2 + \sqrt{3}$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -2 - \sqrt{3}]$, strictement décroissante sur $[-2 - \sqrt{3}, -1[$, strictement décroissante sur $] -1, -2 + \sqrt{3}]$ et strictement croissante sur $[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ donc par composition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = e > 0$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ donc par composition et produit

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty.$$

De même, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$ donc par composition et produit

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^-.$$

2. La fonction g est définie pour tout t tel que $1+t > 0$. Elle est donc définie sur $] -1, +\infty[$ et y est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $t > -1$, on a

$$g'(t) = \frac{2(1+t) - 2t}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{2 - (1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{(1+t)^2}.$$

Ainsi, si $t < 1$, $g'(t) > 0$ et si $t > 1$, $g'(t) < 0$ donc g est strictement croissante sur $] -1, 1[$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

On a $\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{2t}{1+t} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -1^+} \ln(1+t) = -\infty$ donc on a une forme indéterminée de

la forme $-\infty + \infty$. Pour la lever, on factorise par $\frac{1}{1+t}$:

$$g(t) = \frac{1}{1+t} (2t - (1+t) \ln(1+t)).$$

Posons $x = 1 + t$. On a

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} (1+t) \ln(1+t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

donc $\lim_{t \rightarrow -1^+} 2t - (1+t) \ln(1+t) = -2$ donc par produit

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+t} (2t - (1+t) \ln(1+t)) = -\infty.$$

Notons que $g(1) = 1 - \ln(2) > 0$.

Enfin, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t} = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty$ donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) = -\infty.$$

Exercice 7

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$. La fonction f admet donc un minimum en 0, ce qui assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0,$$

i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

2. Posons pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) - (x-1) = \ln(x) - x + 1$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a $g'(x) > 0$ si et seulement si $x < 1$ et $g'(x) < 0$ si et seulement si $x > 1$. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. La fonction g admet donc un maximum en 1, ce qui assure que pour tout $x > 0$,

$$g(x) \leq g(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0,$$

i.e. pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 8

On a montré dans le TD2 que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci implique que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\ln(\sqrt{ab}) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

i.e. pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 9

Posons pour tout $x \geq 1$, $f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1) + x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}.$$

On a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$ donc f est décroissante sur $[1, \frac{4}{3}]$ et est croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$.

Ainsi, f admet un minimum en $\frac{4}{3}$ qui vaut $f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3}-2)\sqrt{\frac{4}{3}-1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

On en déduit que pour tout $x \geq 1$, $(x-2)\sqrt{x-1} \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 10

1. Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$x^3 = (x^x)^3 \Leftrightarrow x^3 = x^{3x} \Leftrightarrow e^{x^3 \ln(x)} = e^{3x \ln(x)}.$$

Par injectivité de la fonction exponentielle, ceci équivaut à

$$x^3 \ln(x) = 3x \ln(x) \Leftrightarrow x \ln(x)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \text{ ou } x^2 - 3 = 0.$$

Si $x \ln(x) = 0$, puisque $x > 0$, ceci implique que $\ln(x) = 0$ d'où $x = 1$.

Si $x^2 - 3 = 0$, i.e. $x^2 = 3$ et puisque $x > 0$, ceci implique que $x = \sqrt{3}$.

Ainsi, les deux solutions de cette équation sont $\{1, \sqrt{3}\}$.

2. Tout d'abord, notons que l'inéquation est bien définie si $x+3 > 0$, i.e. $x > -3$ et $x-1 > 0$, i.e. $x > 1$. Donc l'inéquation est bien définie pour tout $x > 1$.

Soit $x > 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+3) - \ln(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1 = \ln(e)$$

donc par croissance de la fonction logarithme népérien, ceci équivaut à

$$\frac{x+3}{x-1} \geq e \Leftrightarrow x+3 \geq e(x-1) \text{ car } x-1 > 0,$$

ce qui équivaut à $x(e-1) \leq 3+e$ d'où en divisant par $e-1 > 0$, on obtient $x \leq \frac{3+e}{e-1} > 1$.

Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]1, \frac{3+e}{e-1}\right]$.

Exercice 11

1. On a $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)}$ donc $f(x)$ est bien défini si $x \neq 0$ et si $1+2x > 0$, i.e. $x > -\frac{1}{2}$.

L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+2x) + \frac{1}{x} \times \frac{2}{1+2x} \right) e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} \\ &= \frac{2x - (1+2x) \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} (1+2x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$ est du signe de $2x - (1+2x) \ln(1+2x)$.

Posons pour tout $x > -\frac{1}{2}$, $g(x) = 2x - (1+2x) \ln(1+2x)$. La fonction g est dérivable sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ et pour tout $x > -\frac{1}{2}$, on a

$$g'(x) = 2 - 2 \ln(1+2x) - (1+2x) \times \frac{2}{1+2x} = -2 \ln(1+2x).$$

Ainsi $g'(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ et $g'(x) < 0$ si et seulement si $x > 0$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Il en découle que la fonction g admet un maximum en 0 donc pour tout $x > -\frac{1}{2}$, $g(x) \leq g(0) = 0$.

Ceci assure que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$.

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^2$.

Enfin, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} = 1.$$

Exercice 12

On a pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)}$.

Posons pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ donc f est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et croissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi, f admet un minimum en $\frac{1}{2}$ et pour tout

$x \in]0, 1[$, on en déduit

$$x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

En composant par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x \in]0, 1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} \geq e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13

On a $a^b = e^{b \ln(a)} = e^{\frac{1}{x} \ln(x^{\frac{1}{x}}) \times x^2} = e^{x \ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x} \times x})} = e^{\ln(x)} = x$.

Exercice 14

1.

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

2. Il y a deux cas :

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, on pose $a = b = \sqrt{2}$ et dans ce cas, on a bien a et b irrationnels et $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ et dans ce cas, on a bien a et b irrationnels et $a^b = 2$ est rationnel.

Dans tous les cas, on peut trouver deux nombres a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.

Remarque : en fait, il suffit de prendre $a = \sqrt{2}$ et $b = 2 \log_2(3) = 2 \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(9)}{\ln(2)}$, dont l'irrationalité est aisée à montrer.

En effet, supposons qu'il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\frac{\ln(9)}{\ln(2)} = \frac{p}{q}$. Alors $p \ln(2) = q \ln(9)$ d'où $9^q = 2^p$, ce qui est impossible car alors un entier pair serait égal à un entier impair ! Donc b est irrationnel et on a bien

$$a^b = \sqrt{2}^{\frac{\ln(9)}{\ln(2)}} = e^{\frac{\ln(9)}{\ln(2)} \ln(\sqrt{2})} = e^{\frac{1}{2} \ln(9)} = e^{\ln(3)} = 3 \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 15

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x) + \arccos(-x). \end{array}$

La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \arccos'(x) - \arccos'(-x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$$

donc la fonction f est constante sur $] -1, 1[$.

Ainsi, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = f(0) = 2 \arccos(0) = \pi$.

D'autre part, $\arccos(1) + \arccos(-1) = \arccos(-1) + \arccos(1) = 0 + \pi = \pi$.

Donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

2. Soit $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x).$

La fonction g est dérivable sur $] -1, 1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $] -1, 1[$ et on a pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$g'(x) = \arcsin'(x) + \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc la fonction g est constante sur $] -1, 1[$.

Ainsi, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = g(x) = g(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

D'autre part,

$$g(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.}$

3. Soit $v : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle donc on ne peut pas en déduire que v est constante sur $\mathbb{R}^*$! On peut simplement en déduire que v est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $v(x) = v(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}.$

De même, pour tout $x < 0$, $v(x) = v(-1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 16

1. Soit $h : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2 \arctan(\sqrt{x})$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc il est nécessaire que x soit positif.

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, $1+x > 0$ et $-1-x < 1-x \leq 1+x$ donc en divisant par $1+x$, $-1 < \frac{1-x}{1+x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$.

Ainsi, la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1-x}{1+x})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{2}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{2}{1+x} \times \frac{1}{\sqrt{4x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$h(x) = h(1) = \arccos(0) - 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0.$$

En outre, $h(0) = \arccos(1) - 2 \arctan(0) = 0$.

Finalement, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = 0$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \geq 0, \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x}).}$$

2. Soit $u : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x)$.

Notons que la fonction $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\arcsin$ est, elle, définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in] -1, 1[$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ donc $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, i.e.

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Ainsi, la fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1 - x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1 - x^2}} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la fonction u est constante sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = u(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0,$$

$$\text{i.e. } \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x) = 0.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x).}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\arctan(x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arctan(x)) > 0$.

De plus, $\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$ donc $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ et puisque $\cos(\arctan(x)) > 0$, on en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$