
DEVOIR MAISON N°6
À RENDRE POUR LE LUNDI 24 NOVEMBRE 2025

Problème 1 : Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

Le but de ce problème est de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \forall x > 0, x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2.$$

Partie I : Résolution par changement de fonction

Soit $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On pose pour tout réel t , $z(t) = y(e^t)$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $y(x) = z(\ln(x))$.
2. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (i.e. z et z' sont dérivables sur $\mathbb{R}$) si et seulement si y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(F) : \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t}.$$

4. Résoudre (F) sur $\mathbb{R}$.

Indication : On pourra chercher une solution particulière de (F) sous la forme $z(t) = ae^{2t}$, où $a \in \mathbb{R}$.

5. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Partie II : Résolution par changement de variable

Soit $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u(x) = x^3 y(x)$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si u est solution sur $]0, +\infty[$ de

$$(G) : \forall x \in]0, +\infty[, u''(x) - \frac{u'(x)}{x} = x^3.$$

2. Résoudre (G) et en déduire à nouveau les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Problème 2 : Une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire

Le but de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) : \forall x \in]0, +\infty[, y'(x) = y \left(\frac{1}{x} \right).$$

On considère $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. (a) En utilisant le fait que f est solution de (E), justifier que f' est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- (b) Démontrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$(E') : \forall x \in]0, +\infty[, x^2 y''(x) + y(x) = 0.$$

2. On introduit la fonction $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $z(x) = f(e^x)$.

- (a) Justifier que z est deux fois dérivable et montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E'') : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y'(x) + y(x) = 0.$$

- (b) Donner les solutions de (E'') sur $\mathbb{R}$.

- (c) En déduire qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right).$$

- (d) Calculer $f(1)$ puis $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- (e) En calculant $f'(1)$ de deux manières différentes, montrer que

$$\lambda = \sqrt{3}\mu.$$

- (f) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 2\mu\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right).$$

3. Réciproquement, vérifier que toute fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = c\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right),$$

où c est une constante réelle, est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant la condition $f(1) = \sqrt{3}$ et donner l'expression de cette fonction. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.