
Liste d'exercices n°10

Arithmétique

Exercice 1.

1. Donner la liste des entiers positifs qui divisent 100.
2. Combien le nombre 6000000 a-t-il de diviseurs positifs ?
3. Combien $13!$ admet-il de diviseurs ?

Exercice 2. Combien d'entiers strictement compris entre 101 et 1001 sont divisibles par 7 ?

Exercice 3. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c , alors a divise $2b + 3c$.
2. Si a divise b et c , alors $c^2 - 2b$ est multiple de a .
3. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = 4$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 4$.
4. Si a est premier avec b , alors a est premier avec b^3 .
5. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c .
6. Si $7a - 9b = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
7. Si a divise b et b divise c et c divise a , alors $|a| = |b|$.
8. Si 19 divise ab , alors 19 divise a ou 19 divise b .
9. Si a est multiple de b et si c est multiple de d , alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
10. Si a divise c et b divise d , alors ab divise cd .
11. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a , alors 9 divise b .
12. Si a divise b ou a divise c , alors a divise bc .
13. « a divise b » équivaut à « $\text{ppcm}(a, b) = |b|$ ».
14. Si a divise b , alors a n'est pas premier avec b .
15. Si a n'est pas premier avec b , alors a divise b ou b divise a .
16. Si 4 ne divise pas bc , alors b ou c est impair.
17. Si a divise b et b ne divise pas c , alors a ne divise pas c .
18. Si 5 divise b^2 , alors 25 divise b^2 .
19. Si 12 divise b^2 , alors 4 divise b .
20. Si 12 divise b^2 , alors 36 divise b^2 .
21. Si 91 divise ab , alors 91 divise a ou 91 divise b .

Exercice 4.

Soit n un entier.

1. Déterminer le pgcd de $9n + 15$ et $4n + 7$ en fonction de n .
2. Montrer que n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) = n^2 - n + 41$.

1. La quantité $P(n)$ est-elle un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que 43 divise $P(n)$.

Exercice 6.

1. Montrer que le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6.
2. Montrer que le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par 24.

Exercice 7. Soit a, b, c des entiers non nuls.

1. Montrer que $\text{pgcd}(ca, cb) = |c| \text{pgcd}(a, b)$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a^2, b^2) = (\text{pgcd}(a, b))^2$.
3. Montrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et si c divise a , alors $\text{pgcd}(c, b) = 1$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a, bc) = 1$ si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$.
5. Montrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a + b, a - b) = 1$ ou 2 et $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$.

Exercice 8. Soit n un entier tel que $10 \leq n \leq 100$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si $\text{pgcd}(n, 210) = 1$.**Exercice 9.**

1. Calculer le pgcd de 637 et 595.
2. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
3. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

Exercice 10. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\text{ppcm}(a, b) = 480$.**Exercice 11.** Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Indication : considérer $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots$

Exercice 12. Soit p un nombre premier tel que $11p + 1$ est le carré d'un entier. Déterminer p .**Exercice 13.** Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On suppose qu'il existe un entier naturel c tel que $ab = c^2$. Montrer que a et b sont eux-mêmes des carrés.**Exercice 14.**

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^9 = b^{25}$.

1. Trouver u et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $25u + 9v = 1$.
2. Soit $c = a^u b^v$, montrer que $c^{25} = a$ et $c^9 = b$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $c \in \mathbb{N}^*$.
5. Plus généralement, soient m, n premiers entre eux tels que $a^m = b^n$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $c^n = a$ et $c^m = b$.

Exercice 15. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, p divise $(a + b)^p - a^p - b^p$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, p divise $n^p - n$. Ce résultat est connu sous le nom de Petit Théorème de Fermat.
4. Montrer que si n est un entier non divisible par p , alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Exercice 16. Soit A une partie de $\{1, 2, \dots, 2n\}$, avec $\text{Card}(A) = n + 1$.

Montrer qu'il existe au moins deux éléments distincts a et b de A tels que a divise b .
(Indication : tout nombre entier s'écrit sous la forme $2^k(2m + 1)$, avec $(k, m) \in \mathbb{N}^2$.)