Chapitre 1 - Ensembles, logique, raisonnements

I. Théorie des ensembles

I.1 Définition d'un ensemble

La théorie des ensembles est une branche des mathématiques crée par le mathématicien allemand Georg Cantor à la fin du XIX^e siècle. A partir des notions d'ensemble et d'appartenance, elle reconstruit les objets usuels des mathématiques : fonctions, relations, entiers naturels, relatifs, rationnels, nombres réels, complexes,... La théorie des ensembles est en fait une théorie fondamentale en mathématiques, et a permis d'introduire des concepts nouveaux, tels que l'existence de plusieurs types d'infini.

Définitions

Un **ensemble** est une collection ou un groupement d'objets mathématiques distincts. Ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.

Soit E un ensemble. Quand a est un **élément** de E, on dit que a est dans E ou que a **appartient** à E et on note $a \in E$, ce qui se lit "a appartient à E". Lorsque a n'est pas élément de E, on dit que a n'appartient pas à E, on note $a \notin E$, ce qui se lit "a n'appartient pas à E".

Un ensemble est parfaitement défini si l'on peut dire pour tout objet mathématique s'il appartient ou non à cet ensemble.

Un ensemble peut se définir **en compréhension** : par une propriété caractérisant ses éléments (par exemple l'ensemble des nombres réels solutions de l'équation $x^2 = 4$), ou bien **en extension** : liste de ses éléments (les entiers -2, 2), ou procédé de construction explicite de ses éléments (les doubles de -1 et 1).

Les éléments d'un ensemble se note entre une paire d'accolades : {éléments de l'ensemble}, ce qui se lit "ensemble des ..." . Dans l'exemple précédent :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\} = \{2n \ ; \ n \in \{-1, 1\}\}.$$

Résoudre une équation ou une inéquation consiste le plus souvent à passer d'une écriture en compréhension d'un ensemble à une écriture en extension plus explicite : liste ou procédé de construction de ses éléments.

Ni l'ordre ni la répétition ne modifie un ensemble, par exemple :

$$\{-2, 2\} = \{-2, -2, 2\} = \{2, -2\} = \{2, 2, 2, -2, 2\}$$

Un ensemble est dit **vide** s'il n'a aucun élément, cet ensemble est unique, s'appelle **ensemble vide** et se note $\emptyset$ ou parfois $\{\}$, mais jamais $\{\emptyset\}$. L'ensemble $\{\emptyset\}$ possède un élément : $\emptyset$.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.

Exemples d'ensembles usuels

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\text{entiers naturels}\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\text{entiers relatifs}\}$
- $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\} = \{\text{nombres décimaux}\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\} = \{\text{nombres rationnels}\}$
- $\mathbb{R} = \{\text{nombres réels}\}$
- $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \{\text{nombres complexes}\}$; où $i^2 = -1$.
- $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ représente les points du plan.
- $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$ représente les points de l'espace.

Exemples d'ensembles définis en compréhension
Soit A un ensemble, P une propriété, F une formule mathématique (par exemple une fonction).

- $\{x \in A \mid P(x)\}$ désigne l'ensemble des éléments de A qui vérifie la propriété P.
- $\{F(x) \mid x \in A\}$ désigne les objets obtenus en mettant tous les éléments de A dans la formule F.
- $\{F(x) \mid x \in A \text{ et } P(x)\}$ désigne parmi les objets obtenus en mettant les éléments de A dans la formule F ceux qui vérifient la propriété P.

Exemple :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un multiple de } 4\} = \{4x,\ x \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \text{ est un entier naturel pair}\}$$

Dans ces trois notations, la **variable** x est dite **muette** est peut dans chaque ensemble être remplacée par n'importe quelle lettre non encore utilisée. Exemple :

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ est un multiple de } 4\} = \{4n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{2p \mid p \text{ est un entier naturel pair}\}$$

I.2 Opérations sur les ensembles

Définitions
Soient A et B deux ensembles.

- On dit que A est **inclus** dans B et on note $A \subset B$ si tout élément de A est élément de B.
- On appelle **partie** de B ou **sous-ensemble** de B tout ensemble inclus dans B.
- On dit que A **contient** B et on note $A \supset B$ si B est inclus dans A c'est-à-dire $B \subset A$.

Définition
Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties de** E et on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties (ou sous-ensembles) de E

$$\mathscr{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$$

Exemples

- Si $E = \emptyset$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\}$ qui a 1 unique élément : $\emptyset$.
- Si $E = \{1\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, E\}$ qui a 2 éléments.
- Si $E = \{1,2\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$ qui a 4 éléments.
- Si $E = \{1,2,3\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$ qui a 8 éléments.

Remarque : 1,2,4,8,...
Sur ces exemples, le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$ vaut 2^n où n est le nombre d'éléments de E. Nous verrons que cette propriété se généralise à tout ensemble fini, ce qui permet en pratique de vérifier que l'on n'a oublié aucun élément dans $\mathscr{P}(E)$.

Exercice
Expliciter $\mathscr{P}(E)$ lorsque $E = \{1,2,3,4\}$.

Définition

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle **intersection** de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
- On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$$
- On appelle **complémentaire** de A dans E et on note $\overline{A}$, $E \backslash A$, A^c l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A
$$\overline{A} = E \backslash A = A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$$
- On appelle **différence** de A et B, on lit "A privé de B" et on note $A \backslash B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B
$$A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **produit cartésien** de A et de B et on note $A \times B$ (lire A "croix" B) l'ensemble des couples d'éléments dont le premier membre appartient à A et le deuxième appartient à B
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
- Cas particulier : si $A = B$ alors $A \times A$ se note A^2
$$A^2 = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A\}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles. Leur produit cartésien se note
$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A_i\}$$

Si tous les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont égaux à un même ensemble A, on abrège
$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A = A \times \cdots \times A = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A\}$$

Propriétés des opérations sur les ensembles

Soient P, Q, R, S des parties d'un ensemble Ω. Notons $\emptyset$ l'ensemble vide.

1. Union $\cup$
   - Associativité : $(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$
   - Commutativité : $P \cup Q = Q \cup P$
   - Élément neutre : $P \cup \emptyset = P$
   - Élément absorbant : $P \cup \Omega = \Omega$
   - Idempotence : $P \cup P = P$

2. Intersection $\cap$
   - Associativité : $(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$
   - Commutativité : $P \cap Q = Q \cap P$
   - Élément neutre : $P \cap \Omega = P$
   - Élément absorbant : $P \cap \emptyset = \emptyset$
   - Idempotence : $P \cap P = P$
3. Distributivités
   - $(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$
   - $(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$
   - $(P \cup Q) \cap (R \cup S) = (P \cap R) \cup (P \cap S) \cup (Q \cap R) \cup (Q \cap S)$
   - $(P \cap Q) \cup (R \cap S) = (P \cup R) \cap (P \cup S) \cap (Q \cup R) \cap (Q \cup S)$
4. Factorisations
   - $(P \cap R) \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap R$
   - $(P \cup R) \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup R$
5. Lois de Morgan
   - $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$
   - $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$
6. Inclusion
   - $P \subset Q \Longleftrightarrow \overline{P} \cup Q = \Omega$
   - $P \subset Q \Longleftrightarrow P \cap \overline{Q} = \emptyset$
7. Double inclusion, équivalences
   - $P = Q \Longleftrightarrow (P \subset Q) \cap (Q \subset P)$
   - $P = Q \Longleftrightarrow (P \subset Q) \cap (P \supset Q)$
   - $P = Q \Longleftrightarrow (P \cap Q) \cup (\overline{P} \cap \overline{Q}) = \Omega$
   - $P = Q \Longleftrightarrow (P \cap \overline{Q}) \cup (\overline{P} \cap Q) = \emptyset$

I.3 Familles d'éléments d'un ensemble

Si E est un ensemble quelconque et I un ensemble fini considéré comme ensemble d'indices, les éléments de l'ensemble noté E^I des applications de I dans E peuvent s'écrire $(a_i)_{i\in I}$. Un tel élément s'appelle une **famille** d'éléments de E indexée par I. Ainsi, on appelle famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble fini I et on note $(a_i)_{i\in I}$ toute suite finie d'éléments a_i de E notés avec des indices i qui parcourt I. Cette famille vérifie $\forall i \in I,\ a_i \in E$. Ainsi $\{a_i \mid i \in I\}$ est une partie de E, ce sont les valeurs prises par la famille $(a_i)_{i\in I}$, qui représente en fait l'application $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & a_i \end{array}$.

Cas particuliers : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$,

- si $I = \{1, \dots, n\}$ alors $(a_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} = (a_i)_{1\leq i\leq n} = (a_1, \dots, a_n)$
- si $I = \{p, \dots, q\}$ alors $(a_i)_{i\in\{p,\dots,q\}} = (a_i)_{p\leq i\leq q} = (a_p, \dots, a_q)$

La notation avec des parenthèses signifie que les éléments $(a_1, \dots, a_n)$ sont des suites finies ordonnées avec répétitions possibles, contrairement aux ensembles $\{a_1, \dots, a_n\}$ sans ordre ni répétition.

Notations

On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I : ce sont les applications de I dans E.

Si $I = [\![1, n]\!]$, on utilise la notation abrégée $E^n = E^{[\![1,n]\!]}$ pour désigner l'ensemble des familles ou suites finies de n éléments de E : on retrouve les éléments du produit cartésien $E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Par définition :

- $E^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I,\ a_i \in E\}$.
- $E^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in E\} = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$
- $E^{[\![p,q]\!]} = \{(a_p, \ldots, a_q) \mid \forall i \in [\![p, q]\!],\ a_i \in E\}$.

Exemples : le plan $\mathbb{R}^2$, l'espace $\mathbb{R}^3$.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble Ω. Leur réunion et leur intersection se notent

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in \Omega \mid \exists i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$$

Leur produit cartésien se note

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A_i\}$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω. Leur réunion et leur intersection se notent

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

II. Logique

La logique mathématique est une discipline des mathématiques introduite à la fin du XIX^e siècle qui s'est donné comme objet l'étude des mathématiques en tant que langage.

II.1 Assertions et connecteurs logiques

Définitions

On appelle **assertion** ou **proposition logique** tout **énoncé mathématique** qui ne dépend d'aucun paramètre, et qui donc ne peut être que soit **vrai**, soit **faux**. Par exemple : l'assertion $3+5=2\times 4$ est vraie, tandis que l'assertion $2=0$ est fausse. De même, $2\in\mathbb{N}$ est vraie tandis que $-2\in\mathbb{N}$ est fausse. Un tel énoncé peut être construit à partir d'objets mathématiques de base connus de tous tels que les nombres (par exemple 2, π, ...), les ensembles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ...), les relations ($\leq$, $=$, ...) les fonctions (sin, cos, exp, ln, $\sqrt{\ }$, ...),...

La **disjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée $P\vee Q$ qui est vraie si au moins une des deux propositions est vraie ; elle est donc fausse uniquement si les deux propositions sont fausses. La disjonction $P\vee Q$ se lit "P **ou** Q".

La **conjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée $P\wedge Q$ qui est vraie si les deux propositions sont vraies ; elle est donc fausse si au moins une des deux propositions est fausse. La conjonction $P\wedge Q$ se lit "P **et** Q".

La **négation** de la proposition P est la proposition notée $\neg P$ qui est vraie lorsque P est fausse, elle est donc fausse lorsque P est vraie. La négation $\neg P$ se lit "**non** P".

L'**implication** d'une proposition Q par une proposition P est la proposition $(\neg P)\vee Q$ notée $P\Rightarrow Q$ qui est fausse seulement si P est vraie et Q fausse. Elle est donc vraie si P est fausse (quelque soit la valeur de Q), ou si Q est vraie (quelque soit la valeur de P). L'implication $P\Rightarrow Q$ se lit "P **implique** Q" ou encore "**si** P **alors** Q". L'implication $P\Rightarrow Q$ se note aussi $Q\Leftarrow P$, ce qui se lit Q **si** P. Dans l'implication $P\Rightarrow Q$, la proposition P s'appelle la **condition suffisante**, et la proposition Q est la **condition nécessaire**.

L'**équivalence** des propositions P et Q notée $P\Leftrightarrow Q$ est la proposition $(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$, elle est vraie lorsque les deux propositions P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon. La proposition $P\Leftrightarrow Q$ se lit "P **est équivalente à** Q" ou "P **équivaut à** Q" ou encore "P **si et seulement si** Q".

Bien comprendre que "P **si** Q" correspond à $P\Leftarrow Q$, tandis que "P **seulement si** Q" signifie $P\Rightarrow Q$.

Pour une proposition P, lorsque l'on cherche une **condition nécessaire et suffisante** Q, on trouve par *analyse* du problème une **condition nécessaire** Q c'est-à-dire $P\Rightarrow Q$, puis dans la *synthèse* on montre que la condition trouvée Q est une **condition suffisante** ce qui signifie $Q\Rightarrow P$.

La **réciproque** de l'implication $P\Rightarrow Q$ est l'implication $Q\Rightarrow P$, également notée $P\Leftarrow Q$. Une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes, elles peuvent avoir des valeurs logiques identiques ou différentes. La conjonction d'une implication et de sa réciproque correspond par définition à l'équivalence

$$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)\Longleftrightarrow(P\Leftrightarrow Q)$$

La **contraposée** de l'implication $P\Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q\Rightarrow\neg P$. Une implication est toujours équivalente à sa contraposée

$$(P\Rightarrow Q)\Longleftrightarrow(\neg Q\Rightarrow\neg P)$$

Preuve : $(\neg Q\Rightarrow\neg P)\Leftrightarrow(\neg\neg Q)\vee\neg P\Leftrightarrow Q\vee\neg P\Leftrightarrow(\neg P)\vee Q\Leftrightarrow(P\Rightarrow Q)$

De même, quitte à échanger P et Q, on a

$$(Q\Rightarrow P)\Longleftrightarrow(\neg P\Rightarrow\neg Q)$$

Grâce aux contraposées, on en déduit directement que

$$\begin{aligned}(P \Leftrightarrow Q) &\Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\\ &\Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)\\ &\Longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) \wedge (Q \Rightarrow P)\\ &\Longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)\end{aligned}$$

Ceci fournit quatre méthodes pour prouver une équivalence. La seconde ligne $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ rappelle que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q ont les mêmes valeurs logiques.

Propriétés des connecteurs logiques

Soient P, Q, R, S des propositions logiques. Notons V la proposition "Vrai" et F la proposition "Faux".

1. Disjonction **ou**
   - Associativité : $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
   - Commutativité : $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
   - Élément neutre : $P \vee F \Leftrightarrow P$
   - Élément absorbant : $P \vee V \Leftrightarrow V$
   - Idempotence : $P \vee P \Leftrightarrow P$
2. Conjonction **et**
   - Associativité : $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
   - Commutativité : $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
   - Élément neutre : $P \wedge V \Leftrightarrow P$
   - Élément absorbant : $P \wedge F \Leftrightarrow F$
   - Idempotence : $P \wedge P \Leftrightarrow P$
3. Distributivités
   - $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
   - $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$
   - $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S) \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$
4. Factorisations
   - $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge R$
   - $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee R$
5. Lois de Morgan
   - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
   - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
6. Implication
   - $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee Q$

- $\neg(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge \neg Q$

7. Équivalences

   - $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
   - $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$
   - $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow$ (P **seulement si** Q) **et** (P **si** Q)
   - $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
   - $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

II.2 Quantificateurs

Les quantificateurs permettent de construire de nouvelles formules à partir d'anciennes, en s'appuyant sur l'utilisation des variables.

Définitions

Soit E un ensemble, P une proposition dans laquelle intervient une variable x pouvant prendre des valeurs dans l'ensemble E.

Le **quantificateur existentiel** noté $\exists$ est défini par : $\exists x \in E, P(x)$ est vraie s'**il existe au moins une valeur** a dans E telle que si l'on remplace la variable x par a dans la formule $P(x)$, alors $P(a)$ est vraie. La proposition $\exists x \in E, P(x)$ se lit "**il existe** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$".

Le **quantificateur universel** noté $\forall$ est défini par : $\forall x \in E, P(x)$ est vraie si **pour toute valeur** a dans E, en remplaçant la variable x par a dans la formule $P(x)$, alors $P(a)$ est vraie. La proposition $\forall x \in E, P(x)$ se lit "**pour tout** x **appartenant à** E**, on a** $P(x)$", ou encore "**quelque soit** x **appartenant à** E**, on a** $P(x)$", ou bien "**pour tout** x **appartenant à** E**, on sait que** $P(x)$ **est vraie**".

Attention, après un quantificateur universel $\forall$ la virgule ne se lit jamais "tel que". En effet, la proposition "**pour tout** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$ **...**" est le début d'une implication, on doit comprendre : "**pour tout** x **appartenant à** E**, si l'on suppose que** $P(x)$ **est vraie alors ...**", ce qui se traduit en logique par $\forall x \in E, (P(x) \Rightarrow \cdots)$.

Commutativité des quantificateurs identiques seulement

Soit P une proposition dépendant de deux variables x et y prenant leurs valeurs dans deux ensembles E et F, alors

- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \Longleftrightarrow \exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$

Mais attention : $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$ n'est pas équivalent à $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$

Négation des quantificateurs

Soit P une proposition dépendant d'une variable x prenant ses valeurs dans un ensemble E. Alors :

- $\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \neg P(x)$
- $\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ \neg P(x)$

Exemple, soit P une proposition dépendant de plusieurs variables x, y, z, t prenant leurs valeurs dans des ensembles E, F, G, H, alors

$$\neg(\exists x \in E, \forall y \in F, \forall z \in G, \exists t \in H,\ P(x,y,z,t)) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists y \in F, \exists z \in G, \forall t \in H,\ \neg P(x,y,z,t)$$

Cas particulier de l'ensemble vide

Pour toute propriété P, on sait bien sûr que la proposition "$\exists x \in \emptyset,\ P(x)$" est fausse.
On en déduit directement que **la proposition "$\forall x \in \emptyset,\ P(x)$" est toujours vraie !**

Exemple
On rappelle que deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Par exemple

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c \neq 0\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b^2-4ac<0\}$$

Les variables utilisées juste après $\{$, $\forall$, $\exists$ sont des variables muettes, et peuvent donc être remplacées par toute variable encore disponible. Par exemple, si a, b, c sont trois réels fixés, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c \neq 0 \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ ay^2+by+c \neq 0$$

On peut donc remplacer la lettre x par $y, z, t, u, v, \ldots$ mais ni par a, ni b, ni c qui sont déjà utilisées dans la proposition. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c \neq 0$ n'est pas équivalente à $\forall c \in \mathbb{R},\ ac^2+bc+c \neq 0$. Rappel

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c \neq 0 \Longleftrightarrow b^2-4ac<0$$

III. Raisonnements

III.1 Axiomes fondamentaux de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Z}$

Axiome fondamental de $\mathbb{N}$

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

De même :

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

III.2 Raisonnement par l'absurde

Pour prouver une proposition P, on peut supposer par l'absurde que $\neg P$, puis aboutir à une contradiction. On a alors montré que $\neg P \Rightarrow F$, d'où $\neg P$ est fausse, d'où P est vraie donc P est démontrée.

Exemple
Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Corrigé
Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Quitte à diviser a et b par leur plus grand dénominateur commun, noté $\operatorname{pgcd}(a,b)$, on peut supposer que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible, c'est-à-dire que a et b sont premiers entre eux. Désormais, $\operatorname{pgcd}(a,b)=1$.

On sait que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, d'où $b\sqrt{2} = a$, donc $2b^2 = a^2$. Ainsi a^2 est un entier pair. Par l'absurde, si a est impair, alors il existe un entier n tel que $a = 2n+1$, donc $a^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ est impair, absurde. Ainsi a est aussi un entier pair. D'où il existe un entier n tel que $a = 2n$. On calcule alors $a^2 = 4n^2$, donc $2b^2 = 4n^2$, d'où $b^2 = 2n^2$. Ainsi b^2 est aussi un entier pair. Par le même raisonnement que précédemment, si l'on suppose par l'absurde que b est impair, on aboutit à la contradiction b^2 impair. D'où b est pair. On a démontré que a et b sont tous les deux pairs, ce qui contredit a et b sont premiers entre eux. D'où la contradiction.

Conclusion : l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est absurde, d'où

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

III.3 Raisonnement par contraposée
Nous avons vu qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, on peut donc parfaitement démontrer la contraposée d'une implication pour conclure que l'implication est vraie.

Ainsi, pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, on prouve sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

De même, pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, on suppose $P \wedge \neg Q$, on aboutit à une contradiction. D'où $P \wedge \neg Q$ est fausse, d'où sa négation $(\neg P) \vee Q$ est vraie, c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$ est vraie.

La plupart des démonstrations par l'absurde qui concernent des implications sont des démonstrations par contraposées déguisées. En effet, pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose $P \wedge \neg Q$, on aboutit à une contradiction. Si la contradiction consiste en $\neg P$, et que l'on n'a pas utilisé l'hypothèse P au cours de la démonstration, mais seulement l'hypothèse $\neg Q$, alors on a en fait prouvé que $\neg Q \Rightarrow \neg P$, qui est bien la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Dans l'exemple précédent, la proposition $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ se démontre bien par l'absurde, puisqu'il ne s'agit pas d'une implication. Mais la proposition "a^2 pair" $\Rightarrow$ "a pair" peut se démontrer par contraposée.

Exemple
Soit a un entier relatif.

1. Démontrer "a^2 pair" $\Rightarrow$ "a pair"

2. Démontrer "a^2 impair" $\Rightarrow$ "a impair"

Réponse
1. Supposons que a est impair. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2n+1$. On calcule $a^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$, d'où a^2 est impair. On a démontré que l'implication "a impair" $\Rightarrow$ "a^2 impair" est vraie. D'où sa contraposée : "a^2 pair" $\Rightarrow$ "a pair" est démontrée.

2. Supposons que a est pair. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2n$. On calcule $a^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$, d'où a^2 est pair. On a démontré que l'implication "a pair" $\Rightarrow$ "a^2 pair" est vraie. D'où sa contraposée : "a^2 impair" $\Rightarrow$ "a impair" est démontrée.

III.4 Raisonnement par disjonction de cas : diviser pour régner
Raisonner par disjonction de cas consiste à appliquer le principe **"diviser pour régner"**.

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, si l'on peut découper la condition suffisante P en une réunion de différents cas $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$, alors il suffit de démontrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $P_j \Rightarrow Q$ est vraie, pour pouvoir conclure que l'implication $P \Rightarrow Q$ est démontrée.

Théorème - disjonction de cas
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_n, P, Q$ des propositions mathématiques telles que $P = P_1 \vee \cdots \vee P_n$

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 \Rightarrow Q \\ \quad\vdots \\ P_n \Rightarrow Q \end{array}\right. \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Démonstration

$$\left\{\begin{array}{c} P_1 \Rightarrow Q \\ \vdots \\ P_n \Rightarrow Q \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \neg P_1 \vee Q \\ \vdots \\ \neg P_n \vee Q \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\iff (\neg P_1 \vee Q) \wedge \cdots \wedge (\neg P_n \vee Q) \\ &\underset{\text{factorisation}}{\iff} (\neg P_1 \wedge \cdots \wedge \neg P_n) \vee Q \\ &\underset{\text{lois de Morgan}}{\iff} \neg(P_1 \vee \cdots \vee P_n) \vee Q \\ &\underset{\text{hypothèse}}{\iff} \neg P \vee Q \\ &\iff (P \Rightarrow Q) \end{aligned}$$

Exemple

Démontrer que pour tout entier relatif a, les entiers a et a^2 ont la même parité.

Réponse

- Si a est pair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2n$. D'où $a^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$ est pair.
- Si a est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2n+1$. D'où $a^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ est impair.

Conclusion : dans tous les cas, a et a^2 ont la même parité.

III.5 Principes de récurrence

Théorème - principe de récurrence simple

Soit P une proposition qui dépend d'un paramètre n prenant des valeurs entières et n_0 un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} P(n_0) \\ \forall n \geq n_0,\ (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \end{array}\right. \Longrightarrow \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Démonstration

Montrons la **contraposée** du principe de récurrence. Supposons que $\neg(\forall n \geq n_0,\ P(n))$. Alors $\exists n \geq n_0,\ \neg P(n)$. Posons $A = \{n \geq n_0 \mid \neg P(n)\}$. Par hypothèse, A est non vide. Ainsi, A **est une partie non vide de** $\mathbb{N}$, et d'après l'**axiome fondamental de** $\mathbb{N}$, l'ensemble A admet un plus petit élément. Notons-le a. Comme $a \in A$, on sait que $a \geq n_0$ et $\neg P(a)$.

- Si $a = n_0$, alors $n_0 \in A$ donc $\neg P(n_0)$.
- Si $a \neq n_0$, alors puisque a est le plus petit élément de A, $a - 1 \notin A$. De plus $a > n_0$ donc $a - 1 \geq n_0$ et $a - 1 \notin A$, donc $P(a-1)$ est vraie. On a montré ici que $P(a-1) \wedge \neg P(a)$, c'est-à-dire $\neg(P(a-1) \Rightarrow P(a))$. Dans ce cas $\exists n = a - 1 \geq n_0, \neg(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, c'est-à-dire $\neg(\forall n \geq n_0, (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

Par disjonction de cas, on a montré que $(\neg P(n_0)) \vee \neg(\forall n \geq n_0,\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$. Ainsi, grâce aux **lois de Morgan** : $\neg(P(n_0) \wedge \forall n \geq n_0,\ (P(n) \Rightarrow P(n+1)))$

On vient de prouver que $\neg(\forall n \geq n_0,\ P(n)) \Longrightarrow \neg(P(n_0) \wedge \forall n \geq n_0,\ (P(n) \Rightarrow P(n+1)))$.

Par contraposée, on en déduit le principe de récurrence.

Rédaction usuelle d'une récurrence

- Pour tout $n \geq n_0$, notons $P(n)$ la proposition ...

  ATTENTION : ne jamais écrire $\forall n \geq n_0$ à l'intérieur de $P(n)$
- Initialisation : on sait que ..., d'où $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \geq n_0$. On suppose que $P(n)$ est vérifiée. Alors ..., d'où $P(n+1)$.
- Conclusion : pour tout $n \geq n_0$, la proposition ... est vraie.

Théorème - principe de récurrence double

Soit P une proposition qui dépend d'un paramètre n prenant des valeurs entières et n_0 un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} P(n_0) \wedge P(n_0+1) \\ \forall n \geq n_0,\ (P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)) \end{array}\right. \Longrightarrow \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Démonstration
Il suffit d'appliquer le principe de récurrence simple à la proposition $Q(n)$ définie par $P(n) \wedge P(n+1)$.

Théorème - principe de récurrence triple

Soit P une proposition qui dépend d'un paramètre n prenant des valeurs entières et n_0 un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \\ \forall n \geq n_0,\ (P(n) \wedge P(n+1) \wedge P(n+2) \Rightarrow P(n+3)) \end{array}\right. \Longrightarrow \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Démonstration
Il suffit d'appliquer le principe de récurrence simple à la proposition $Q(n)$ définie par $P(n) \wedge P(n+1) \wedge P(n+2)$.

On peut ainsi étendre ce principe à un nombre fini de cas consécutifs.

Théorème - principe de récurrence forte

Soit P une proposition qui dépend d'un paramètre n prenant des valeurs entières et n_0 un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} P(n_0) \\ \forall n \geq n_0,\ (P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)) \end{array}\right. \Longrightarrow \forall n \geq n_0,\ P(n)$$

Démonstration
Il suffit d'appliquer le principe de récurrence simple à la proposition $Q(n)$ définie par $P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)$.

Remarque
Cette dernière récurrence est utile lorsque l'hypothèse $P(n)$ ne suffit pas à prouver la proposition $P(n+1)$, mais que l'on se serve de termes plus anciens, comme par exemple de $P(n/2)$ si n est pair...

Exemple

III.6 Raisonnement par double inclusion

Rappel

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si ils ont exactement les mêmes éléments, ce que l'on peut traduire par :

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

De même,

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

$$A \supset B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftarrow x \in B).$$

Rappel

$$A \supset B \Longleftrightarrow B \subset A$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème - raisonnement par double inclusion

Soient A et B deux ensembles,

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Rappel

Soit E un ensemble, et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors pour tout objet A, on a

$$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E.$$

III.7 Raisonnement par analyse-synthèse

Pour une proposition P, lorsque l'on cherche une **condition nécessaire et suffisante** Q, on trouve par *analyse* du problème une **condition nécessaire** Q c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$, puis dans la *synthèse* on montre que la condition trouvée Q est une **condition suffisante** ce qui signifie $Q \Rightarrow P$.

Plus généralement, un raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux étapes.

1. L'**analyse** : on raisonne sur une hypothétique solution au problème (en supposant qu'elle existe), et on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution, on trouve ainsi une **condition nécessaire** vérifiée par toutes solutions éventuelles du problème posé.

2. La **synthèse** : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions. On trouve ainsi une **condition suffisante** vérifiée par les solutions du problème posé.

Il arrive que la phase d'analyse produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un seul "candidat" qui les vérifie : dans ce cas cette première phase prouve l'**unicité** de la solution, si elle existe. Puis la phase de synthèse permet de montrer l'**existence** de plusieurs solutions, ou d'une solution unique (si un seul des candidats fonctionne), ou encore qu'il n'y a aucune solution (si aucun candidat ne fonctionne). Parfois, la phase d'analyse aboutit à une contradiction, dans ce cas, cela démontre directement que le problème n'a pas de solution.

Rappel : en mathématiques, **unicité** signifie 0 ou 1. **Existence** signifie 1 ou plusieurs.

Plus l'analyse est poussée, plus le nombre de candidats à tester pour la synthèse est réduit. Dans le cas où l'analyse est poussée à son extrême, on dit qu'elle est **complète**, tous les candidats sont solutions lors de la synthèse. Dans ce cas, la démonstration par analyse-synthèse peut être vue comme une **double inclusion** d'ensembles : l'analyse prouve que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est inclus dans un certain ensemble $\mathscr{R}$ de réponses possibles : $\mathscr{S} \subset \mathscr{R}$, puis la synthèse montre l'inclusion réciproque $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$ en prouvant que chaque réponse éventuelle dans $\mathscr{R}$ est bien solution du problème. Dans ce cas, la démonstration peut être rédigée aussi bien par **analyse-synthèse** que par **double inclusion**.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x-1} = 2x-3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Réponse

- Analyse : si un réel x est solution de l'équation, alors en élevant au carré, on obtient $x-1 = 4x^2 - 12x + 9$ d'où $4x^2 - 13x + 10 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = 169 - 160 = 9 = 3^2$. Les solutions éventuelles sont donc $x_1 = \frac{16}{8} = 2$ et $x_2 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.
- Synthèse :
  - Le réel $x_1 = 2$ vérifie bien $\sqrt{2-1} = 1 = 2 \times 2 - 3$ donc 2 est bien solution de l'équation.
  - Le réel $x_2 = \frac{5}{4}$ vérifie $\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$ tandis que $2x - 3 = -\frac{1}{2}$ donc $\frac{5}{4}$ n'est pas solution de l'équation.
- Conclusion : l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\sqrt{x-1} = 2x-3$ est donc le singleton $\mathscr{S} = \{2\}$. On peut aussi conclure que l'équation $\sqrt{x-1} = 2x-3$ admet une unique solution qui vaut 2.

Remarque

Dans $\mathbb{R}$ on sait que $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$, mais la réciproque est fausse. En fait $(a = b) \vee (a = -b) \Longleftrightarrow a^2 = b^2$. D'où l'apparition de solution(s) éventuelle(s) supplémentaire(s) en élevant au carré : dans notre exemple le réel $x_2 = \frac{5}{4}$ vérifie en fait l'équation $\sqrt{x-1} = -(2x-3)$. Lors de l'analyse, en élevant au carré, on obtient seulement une **condition nécessaire** $x \in \{2, \frac{5}{4}\}$ mais qui n'est pas suffisante dans cet exemple.

TD1 - Ensembles, logique, raisonnements

Exercice 1

1. Expliciter $\mathscr{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x-1} = 2x - 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit E un ensemble et A une partie de E.

1. Exprimer le fait que A est un singleton au moyen des connecteurs propositionnels, de variables quantifiées et des seules relations d'appartenance et d'égalité.
2. Donner la négation de l'énoncé précédent.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Que signifie chacun des énoncés suivants ? Écrire la négation de chaque énoncé.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$
3. $\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists T \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$
6. $\exists T \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Exercice 4
Démontrer les propositions suivantes :

1. Prouver par contraposée :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad ((\forall \varepsilon > 0, \qquad |a| \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0)$$
2. (a) Prouver par récurrence forte et sans utiliser la décomposition en facteurs premiers :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \exists!(k,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad n = 2^k(2p+1)$$
   (b) En déduire que si l'on choisit $n+1$ nombres dans l'intervalle d'entiers $[\![1, 2n]\!]$, alors il y en a deux parmi eux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 5
Déterminer les réels x tels que

1. $|x-1| \leq x^2 - x + 1$
2. $|x+1| = 4 - |3x-2|$