

Problème 1 : Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

Partie I : Résolution par changement de fonction

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On peut bien calculer $z(\ln(x))$ puisque z est définie sur \mathbb{R} et on a $z(\ln(x)) = y(e^{\ln(x)}) = x$ d'où $\boxed{\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x))}$.

2. • Supposons que z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

On a pour tout $x > 0, y(x) = z(\ln(x))$ donc y est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* et on a pour tout $x > 0, y'(x) = \frac{z'(\ln(x))}{x}$.

De même, puisque z' est dérivable sur \mathbb{R} par hypothèse, y' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée d'applications dérivables sur \mathbb{R}_+^* et on a pour tout $x > 0$,

$$y''(x) = \frac{\frac{z''(\ln(x))}{x} \times x - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2}.$$

- Supposons que y est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On a pour tout réel $t, z(t) = y(e^t)$. Puisque pour tout réel $t, e^t > 0$ et que y est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , alors z est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $t \in \mathbb{R}, z'(t) = e^t y'(e^t)$.

De même, puisque y' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , la fonction z' est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

Ainsi, on a bien montré que z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} si et seulement si y est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

3. • Supposons que y est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . D'après les calculs faits en question précédente, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 3y(e^t) \\ &= (e^t)^2 y''(e^t) + 5e^t y'(e^t) + 3y(e^t). \end{aligned}$$

Or, puisque y est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* , on a pour tout $x > 0, x^2 y''(x) + 5x y'(x) + 3y(x) = x^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}, e^t > 0$ donc on a pour tout $t \in \mathbb{R}, (e^t)^2 y''(e^t) + 5e^t y'(e^t) + 3y(e^t) = (e^t)^2 = e^{2t}$ d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t}$, ce qui prouve que z est solution sur \mathbb{R} de (F) .

- Réciproquement, supposons que z est solution de (F) sur \mathbb{R} .

D'après les calculs faits en question précédente, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + 5x y'(x) + 3y(x) &= z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + 5z'(\ln(x)) + 3z(\ln(x)) \\ &= z''(\ln(x)) + 4z'(\ln(x)) + 3z(\ln(x)). \end{aligned}$$

Or, puisque z est solution de (F) sur \mathbb{R} , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t}$ d'où pour tout $x > 0$, $z''(\ln(x)) + 4z'(\ln(x)) + 3z(\ln(x)) = e^{2\ln(x)} = x^2$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2$, ce qui prouve que y est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, on a bien montré que

$$z \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

4. • Soit $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = 0$ l'équation homogène associée à (F) .

Les racines de l'équation caractéristique associée $r^2 + 4r + 3 = 0$ sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$ donc d'après le cours, on sait que

$$\mathcal{S}_H = \{z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Cherchons une solution particulière de (F) sous la forme $z(t) = ae^{2t}$ où $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = 2ae^{2t}$ et $z''(t) = 4ae^{2t}$ donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}(4a + 8a + 3a) = e^{2t} \\ &\Leftrightarrow 15a = 1 \quad \text{car pour tout } t \in \mathbb{R}, e^{2t} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{15}e^{2t}$ est solution particulière de (F) donc les solutions de (F) sur \mathbb{R} sont

$$\mathcal{S}_F = \left\{ z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. On sait d'après la question 3) que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution de (F) sur \mathbb{R} , c'est à dire d'après la question précédente si et seulement si il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{2t}$, ce qui équivaut à pour tout $x \in]0, +\infty[$, $y(x) = z(\ln(x)) = \lambda e^{-\ln(x)} + \mu e^{-3\ln(x)} + \frac{1}{15}e^{2\ln(x)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^3} + \frac{1}{15}x^2$ donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^3} + \frac{1}{15}x^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Partie II : Résolution par changement de variable

1. La fonction u est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* car y l'est et on a pour tout $x > 0$, $u'(x) = 3x^2 y(x) + x^3 y'(x)$ et

$$u''(x) = 6xy(x) + 3x^2 y'(x) + 3x^2 y'(x) + x^3 y''(x) = x^3 y''(x) + 6x^2 y'(x) + 6xy(x).$$

Ainsi, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} u''(x) - \frac{u'(x)}{x} &= x^3 y''(x) + 6x^2 y'(x) + 6xy(x) - 3xy(x) - x^2 y'(x) \\ &= x(x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x)). \end{aligned}$$

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x(x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x)) = x^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u''(x) - \frac{u'(x)}{x} = x^3 \\
&\Leftrightarrow u \in \mathcal{S}_G
\end{aligned}$$

donc y est solution de (E) si et seulement si u est solution de (G) .

2. • On a $u \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow u' \in \mathcal{S}_{G'}$ où

$$(G') : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^3.$$

Soit $(H') : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 0$ l'équation homogène associée à (G') .

Si on pose pour tout $x > 0$, $a(x) = -\frac{1}{x}$, alors la fonction $A : x \mapsto -\ln(x)$ est une primitive de a sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\mathcal{S}_{H'} = \{f : x \mapsto \lambda e^{\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{f : x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Pour trouver une solution particulière de (G') , on utilise la méthode de variation de la constante, i.e. on cherche une solution particulière de (G') sous la forme $f_p(x) = \lambda(x)x$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On a alors

$$\begin{aligned}
f_p \in \mathcal{S}_{(G')} &\Leftrightarrow \forall x > 0, f'_p(x) - \frac{f_p(x)}{x} = x^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda'(x)x + \lambda(x) - \lambda(x) = x^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda'(x) = x^2.
\end{aligned}$$

On peut poser pour tout $x > 0$, $\lambda(x) = \frac{x^3}{3}$ et on trouve que $f_p : x \mapsto \lambda(x)x = \frac{x^4}{3}$ est une solution particulière de (G') sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, $\mathcal{S}_{G'} = \{f : x \mapsto \lambda x + \frac{x^4}{3}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi,

$$u \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow u' \in \mathcal{S}_{G'} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, u'(x) = \lambda x + \frac{x^4}{3} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u(x) = \lambda \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{15} + \mu.$$

Quand λ parcourt \mathbb{R} , $\frac{\lambda}{2}$ fait de même donc

$$\mathcal{S}_G = \{u : x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^5}{15} + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que

$$(G) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{xu''(x) - u'(x)}{x^2} = x^2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = x^2$$

où $v(x) = \frac{u'(x)}{x}$. donc $(G) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{x^4}{3} + \lambda x$

d'où $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{x^5}{15} + \lambda \frac{x^2}{2} + \mu$.

- D'après la question précédente, on a

$$y \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow x \mapsto x^3 y(x) \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^3 y(x) = \lambda x^2 + \frac{x^5}{15} + \mu$$

donc finalement

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^3} + \frac{x^2}{15}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Problème 2 : Une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire

- (a) Par hypothèse, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Puisque f et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* , f' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

- (b) On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc en dérivant cette égalité, on obtient pour tout $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc en appliquant cette égalité à $\frac{1}{x}$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ d'où pour tout $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$, i.e. pour tout $x > 0$, $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ donc f est solution de (E') sur \mathbb{R}_+^* .

- (a) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ est dérivable à valeurs strictement positives et que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , on en déduit que z est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = e^x f'(e^x)$.

De même, puisque f' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* d'après la question 1.a), on en déduit que z' est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x)$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) - z'(x) + z(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) = (e^x)^2 f''(e^x) + f(e^x).$$

D'après la question 1.b), on sait que f est solution de (E') sur \mathbb{R}_+^* donc pour tout $x > 0$, $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc en appliquant l'équation (E') pour e^x , on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)^2 f''(e^x) + f(e^x) = 0$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) - z'(x) + z(x) = 0,$$

ce qui prouve que z est solution de (E'') sur \mathbb{R} .

- (b) Soit $(EC) : r^2 - r + 1 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E'') .

On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc (EC) admet deux racines complexes conjuguées que sont $r_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après le cours, les solutions de (E'') sur \mathbb{R} sont

$$\mathcal{S}_{E''} = \left\{ y : x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = f(e^x)$ donc pour tout $x > 0$, $z(\ln(x)) = f(e^{\ln(x)}) = f(x)$.

Or, puisque $z \in \mathcal{S}_{E''}$ d'après la question 2.a), on sait d'après la question précédente

qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right)$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) = z(\ln(x)) = e^{\frac{\ln(x)}{2}} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)$

i.e.

$$\boxed{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)}.$$

(d) D'après la question précédente, on a $f(1) = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0)$ donc $\boxed{f(1) = \lambda}$.

Par ailleurs, puisque f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* , on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right)$$

i.e.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \mu \sin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)$$

ou encore

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) - \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)}.$$

Autre méthode : en dérivant l'expression de f obtenue en question précédente, on obtient pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right) \\ &\quad + \sqrt{x} \left(-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \frac{\mu\sqrt{3}}{2x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left((\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)}. \end{aligned}$$

(e) En utilisant la première formule obtenue par f' en question précédente, on trouve $f'(1) = \lambda$.

En utilisant la deuxième formule, on trouve $f'(1) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu\sqrt{3})$ d'où

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \mu\sqrt{3}) \Leftrightarrow 2\lambda = \lambda + \mu\sqrt{3}$$

d'où $\boxed{\lambda = \sqrt{3}\mu}$.

(f) On a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) &= 2\mu\sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2\mu\sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{x}\left(\sqrt{3}\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\lambda = \sqrt{3}\mu$ donc pour tout $x > 0$:

$$2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right),$$

i.e. $\text{pour tout } x > 0, f(x) = 2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)$ (en utilisant l'expression de f obtenue en question 2.c)).

3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $g : x \mapsto c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* et on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{c}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) - c\sqrt{x} \times \frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{formule d'addition de cos}) \\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{par parité de cos}) \\
&= c\sqrt{\frac{1}{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= g\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

donc g est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* .

4. Dans les questions 1 et 2, on a montré que si f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* , alors il existe une constante c (en posant $c = 2\mu$) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right).$$

Réciproquement, on a vérifié dans la question précédente que toutes les fonctions de cette forme étaient bien solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, on a donc bien

$$\mathcal{S}_E = \left\{ f : x \mapsto c\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right), c \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Soit f une solution de (E) . Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = c\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right)$.

On a alors

$$f(1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow c \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow c \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow c = 2$$

donc l'unique solution f de (E) vérifiant $f(1) = \sqrt{3}$ est la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right)$.

La fonction $x \mapsto \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right)$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ donc par produit, on en

déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.