Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. (a) D'après la formule d'Euler, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x) - 6i\sin(x))$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).}$

(b) En primitivant $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, on en déduit que la fonction

$$\boxed{x \mapsto -\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(3x) \text{ est une primitive de } x \mapsto \sin^3(x) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. • Résolvons d'abord l'équation homogène

$$(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = 0.$$

Soit $a : x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est $A : x \mapsto -\ln(1+x^2)$. L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda e^{\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

d'où

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto y(x) = \lambda(1+x^2), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Trouvons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode de variation de la constante, ce qui revient à chercher une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)(1+x^2)$, où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = (1+x^2)\sin^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)(1+x^2) + 2x\lambda(x) - 2x\lambda(x) = (1+x^2)\sin^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \sin^3(x). \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$. D'après la première question, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)$.
On obtient donc $y : x \mapsto (1+x^2)\left(\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right)$ comme solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{y : x \mapsto y(x) = (1+x^2)\left(\lambda + \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Problème 1 : Racines de solutions d'équations du second ordre

Partie I : Cas où q est constante strictement positive

1. L'équation caractéristique associée à (E_k) est $r^2 + k = 0$ dont les racines complexes conjuguées sont $r_1 = i\sqrt{k}$ et $r_2 = -i\sqrt{k}$ (puisque $k > 0$). D'après le théorème donnant les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants, les solutions de (E_q) sont

$$\boxed{\{y : x \mapsto \lambda\cos(\sqrt{k}x) + \mu\sin(\sqrt{k}x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

2. Soit y une solution non nulle de (E_q). Il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \neq (0, 0)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda\cos(\sqrt{k}x) + \mu\sin(\sqrt{k}x)$. Puisque $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, on a $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence suivante :

$$y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos(\sqrt{k}x) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\sqrt{k}x) = 0.$$

Puisque $\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ et $\cos(\theta) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned} y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(\theta)\cos(\sqrt{k}x) + \cos(\theta)\sin(\sqrt{k}x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(\sqrt{k}x + \theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{k}x + \theta \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{k}x \equiv -\theta[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv -\frac{\theta}{\sqrt{k}}\left[\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right]. \end{aligned}$$

Les racines de y sont alors $\boxed{\left\{-\frac{\theta}{\sqrt{k}} + n\frac{\pi}{\sqrt{k}}, n \in \mathbb{Z}\right\}}$, ce qui prouve que y admet une infinité de racines et que deux racines consécutives sont distantes de $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Partie II : Entrelacement de racines

1. Puisque f est une solution de (E_p), la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il en est donc de même de la fonction $-f$. De plus, puisque f est non nulle, $-f$ l'est également. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) + p(x)f(x) = 0$, d'où $-f''(x) - p(x)f(x) = 0$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, (-f)''(x) + p(x) \times (-f)(x) = 0$, ce qui prouve que $\boxed{-f \text{ est une solution non nulle de } (E_p).}$

2. Puisque f et g sont des solutions de (E_p) et (E_q) respectivement, les fonctions f et g sont deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f, g, f' et g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc W est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$W'(x) = f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

Puisque f est solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) = -p(x)f(x)$. De même, puisque g est solution de (E_q) sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, g''(x) = -q(x)g(x)$. Ainsi, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, W'(x) = p(x)f(x)g(x) - f(x)q(x)g(x) = f(x)g(x)(p(x) - q(x)).}$$

3. Puisque a et b sont des racines consécutives de f, par définition, ceci signifie que pour tout $x \in]a, b[, f(x) \neq 0$.
   Supposons par l'absurde que f ne soit pas de signe constant sur $]a, b[$. Ceci signifie qu'il existe $(x_1, x_2) \in]a, b[^2$ tel que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Or, f est continue sur $]a, b[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci impliquerait que f s'annule sur $]a, b[$, ce qui est impossible.
   On en déduit bien que $\boxed{f \text{ est de signe constant sur}]a, b[.}$
4. Supposons par l'absurde que $f'(a) = 0$. Alors f est une solution de (E_p) qui vérifie
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f(a) & = & 0 \\ f'(a) & = & 0 \end{array} \right. .$$
   Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'ordre 2 (rappelée dans l'énoncé), la seule solution de (E_p) qui vérifie ces deux conditions est la fonction nulle, donc f est la solution nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.
   Nécessairement, $\boxed{f'(a) \neq 0}$.
   On montre de même que $\boxed{f'(b) \neq 0}$.
5. • Par définition, on a $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{x - a}$ car $f(a) = 0$.
   Or, pour tout $x \in]a, b[, f(x) > 0$ et $(x - a) > 0$ donc $\dfrac{f(x)}{x - a} > 0$.
   Ceci implique que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. Puisque $f'(a) \neq 0$, on en déduit que $\boxed{f'(a) > 0.}$
   • De même, on a $f'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{x - b}$ car $f(b) = 0$.
   Or, pour tout $x \in]a, b[, f(x) > 0$ et $(x - b) < 0$ donc $\dfrac{f(x)}{x - b} < 0$.
   Ceci implique que $f'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leqslant 0$. Puisque $f'(b) \neq 0$, on en déduit que $\boxed{f'(b) < 0.}$
6. Supposons par l'absurde que g ne s'annule pas sur $[a, b]$. De manière analogue à la question 3, on montre grâce au théorème des valeurs intermédiaires que g est de signe constant sur $[a, b]$.
   De la même manière que pour f, quitte à changer g en $-g$, on peut supposer que pour tout $x \in [a, b], g(x) > 0$.
   Or, pour tout $x \in [a, b], W'(x) = f(x)g(x)(p(x) - q(x))$. Puisque pour tout $x \in [a, b], p(x) \leqslant q(x)$ par hypothèse, que $f(x) \geqslant 0$ et que $g(x) > 0$, on a pour tout $x \in [a, b], W'(x) \leqslant 0$ donc la fonction W est décroissante sur $[a, b]$.
   Or, $W(a) = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) = -f'(a)g(a) < 0$ et $W(b) = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = -f'(b)g(b) > 0$. Ainsi $W(b) > W(a)$, ce qui contredit la décroissance de W sur $[a, b]$.
   L'hypothèse de non-annulation de g sur $[a, b]$ étant absurde, on en déduit que
   $$\boxed{g \text{ s'annule au moins une fois sur } [a, b].}$$

Partie III : Estimations de q et racines d'une solution

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que g s'annule au moins une fois sur le segment $\left[a, a+\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$.

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, p(x)=k$. La fonction p est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie par hypothèse $p(x) \leqslant q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On a vu en question 2 de la partie I que les solutions non nulles de $(E_p)=(E_k)$ sont de la forme $x \mapsto \sin(\sqrt{k}x+\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   Soit $f : x \mapsto \sin(\sqrt{k}(x-a))$. La fonction f est une solution non nulle de (E_k) dont deux racines consécutives sont a et $a+\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.
   Or, d'après la partie précédente, il y a toujours au moins une racine de g entre deux racines de f.
   Donc g s'annule au moins une fois sur le segment $\left[a, a+\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$, ce qui prouve que

$$\boxed{g \text{ s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur } \frac{\pi}{\sqrt{k}}.}$$

2. Supposons qu'il existe un segment de longueur strictement inférieure à $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, qu'on note $[a, a+l]$ où $a \in \mathbb{R}$ et $0<l<\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, tel que g s'annule au moins deux fois sur ce segment.
   En inversant les rôles de p et q par rapport à la question précédente, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, q(x) \leqslant k$, toute solution non nulle de (E_k) s'annule au moins une fois entre deux racines de g, donc sur $[a, a+l]$.
   Soit ε un nombre strictement positif tel que $0<\varepsilon<\frac{\pi}{\sqrt{k}}-l$.
   Soit $f : x \mapsto \sin(\sqrt{k}(x-a+\varepsilon))$.
   La fonction f est une solution non nulle de (E_k) dont deux racines consécutives sont $a-\varepsilon \notin [a, a+l]$ et $a-\varepsilon+\frac{\pi}{\sqrt{k}}>a+l$ donc $a-\varepsilon+\frac{\pi}{\sqrt{k}}>a+l$.
   On dispose donc d'une solution non nulle de (E_k) qui ne s'annule pas sur $[a, a+l]$, ce qui contredit le fait que g s'annule au moins deux fois sur ce segment.
   On en conclut que

$$\boxed{g \text{ s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à } \frac{\pi}{\sqrt{k}}.}$$

Partie IV : Application à l'équation de Bessel

1. Puisque $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$ est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}f'(x)=\frac{f(x)+2xf'(x)}{2\sqrt{x}}$$

   et

$$g''(x)=\frac{2\sqrt{x}(f'(x)+2f'(x)+2xf''(x))-\frac{1}{\sqrt{x}}(f(x)+2xf'(x))}{4x}=\sqrt{x}f''(x)+\frac{1}{\sqrt{x}}f'(x)-\frac{1}{4x\sqrt{x}}f(x).$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} g \in \mathcal{S}_{E'} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+*, g''(x) + \left(1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) g(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+*, \sqrt{x} f''(x) + \dfrac{1}{\sqrt{x}} f'(x) - \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} f(x) + \left(1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) \sqrt{x} f(x) = 0 \\ & \overset{\times x\sqrt{x}}{\Leftrightarrow} & \forall x \in \mathbb{R}_+*, x^2 f''(x) + x f'(x) - \dfrac{1}{4} f(x) + \left(1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) x^2 f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+*, x^2 f''(x) + x f(x) + x^2 f(x) - \alpha^2 f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+*, x^2 f''(x) + x f(x) + (x^2 - \alpha^2) f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & f \in \mathcal{S}_E \end{array}$$

donc

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } g \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} > 0$, les fonctions f et g ont les mêmes racines.

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, q(x) = 1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}$. Ainsi g est solution de (E_q) puisque f est solution de (E).

   • Si $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a $\alpha^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ donc $4\alpha^2 - 1 \geqslant 0$ et on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, q(x) \leqslant 1$.
   D'après les résultats de la partie précédente (appliqués pour $k = 1$), on en déduit que g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π.
   Puisque f et g ont les mêmes racines, on en conclut que

   $$\boxed{\text{si } \alpha \geqslant \dfrac{1}{2}, f \text{ s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à } \pi.}$$

   • Si $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $\alpha^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $4\alpha^2 - 1 \leqslant 0$ et on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, q(x) \geqslant 1$.
   D'après les résultats de la partie précédente (appliqués pour $k = 1$), on en déduit que g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π.
   Puisque f et g ont les mêmes racines, on en conclut que

   $$\boxed{\text{si } \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}, f \text{ s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur } \pi.}$$

Problème 2 : Nombres parfaits pairs

Partie I : Nombres de Mersenne

1. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, a^n - b^n = (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (formule valable également pour $n = 0$) avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \in \mathbb{Z}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a - b \text{ divise } a^n - b^n.}$

2. • Supposons que m divise n. Par définition, il existe un entier naturel k non nul tel que $n = mk$.

   Ainsi, $a^n - 1 = (a^m)^k - 1^k$. Or, d'après la question précédente, $a^m - 1$ divise $(a^m)^k - 1^k$ donc $a^m - 1$ divise $a^n - 1$.

   • Réciproquement, supposons que $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. Montrons que m divise n.

   ▷ Si $m = 0$, alors $a^m - 1 = 0$ donc $a^n - 1 = 0$ puisque $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. Ainsi, $a^n = 1$ et puisque $a > 1$, on a nécessairement $n = 0$. On a donc bien dans ce cas m qui divise n.

   ▷ Supposons dorénavant que $m \neq 0$.

   Effectuons la division euclidienne de n par m. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = mq + r$ et $0 \leqslant r < m$.

   On a alors $a^n - 1 = (a^m)^q a^r - 1 = a^r((a^m)^q - 1) + a^r - 1$ donc

   $$a^r - 1 = a^n - 1 - a^r((a^m)^q - 1).$$

   Par hypothèse, $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. Par ailleurs, d'après le sens direct que l'on vient de démontrer, $a^m - 1$ divise $(a^m)^q - 1$.

   Il en découle que $a^m - 1$ divise $a^n - 1 - a^r((a^m)^q - 1) = a^r - 1$.

   Or, $0 \leqslant r < m$ donc $0 \leqslant a^r - 1 < a^m - 1$ (puisque $a > 1$).

   Si on avait $a^r - 1 > 0$, puisque $a^m - 1$ divise $a^r - 1$, on aurait $|a^m - 1| \leqslant |a^r - 1|$, i.e. $a^m - 1 \leqslant a^r - 1$ puisque les deux termes sont positifs, ce qui contredit $a^r - 1 < a^m - 1$.

   Il s'ensuit que $a^r - 1 = 0$, d'où $r = 0$ puisque $a > 1$.

   Ainsi, $n = mq$ donc m divise n.

   Finalement, on a bient montré que $\boxed{a^m - 1 \,\text{divise}\, a^n - 1 \,\text{si et seulement si}\, m \,\text{divise}\, n.}$

3. Soit $n > 1$. D'après la première question, on sait que $a - 1$ divise $a^n - 1$.

   Or, $a > 2$ donc $a - 1 > 1$ et $a - 1 < a^n - 1$ puisque $n > 1$ et $a > 1$. Ainsi, $a - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$ tel que $1 < a - 1 < a^n - 1$ donc $\boxed{a^n - 1 \,\text{n'est pas premier.}}$

4. Montrons la contraposée, i.e. montrons que si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ n'est pas premier.

   Suposons que n n'est pas premier.

   • Si $n = 0, 2^n - 1 = 0$ et si $n = 1, 2^n - 1 = 1$ donc $2^n - 1$ n'est pas premier dans ces deux cas.

   • Supposons que $n \geqslant 2$. Puisque n n'est pas premier, n admet un diviseur strict d tel que $1 < d < n$.

   Puisque d divise n, on sait d'après la question 2 que $2^d - 1$ divise $2^n - 1$.

   Or, puisque $1 < d < n$, on a $1 < 2^d - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

   On en conclut par contraposée que $\boxed{\text{si}\, 2^n - 1 \,\text{est premier, alors}\, n \,\text{est premier.}}$

Partie II : Calcul de $S(n)$

1. • Supposons que n est premier. Alors nécessairement $n \geqslant 2$ et ses seuls diviseurs positifs sont 1 et n donc $S(n) = n + 1$.

   • Supposons que $S(n) = n + 1$. On sait que $n \neq 1$ car $S(1) = 1 \neq 1 + 1$.

   On a donc nécessairement $n \geqslant 2$. Si n n'était pas premier, il existerait un entier d divisant n tel que $1 < d < n$ et on aurait $S(n) \geqslant n + d + 1 > n + 1$.

   Ainsi, si $S(n) = n + 1$, l'entier n est nécessairement premier.

   On a donc bien montré que $\boxed{n \,\text{est premier si et seulement si}\, S(n) = n + 1.}$

2. On sait d'après le cours que $\mathcal{D}(p^n) = \{p^k, k \in [\![0, n]\!]\}$. Ainsi, puisque $p \neq 1$, on a

$$\boxed{S(p^n) = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.}$$

3. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$. Par hypothèse, x divise a donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kx$. De même, y divise b donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k'y$ d'où $ab = (xy)(kk')$, ce qui prouve que xy est un diviseur positif de ab (puisque x et y sont positifs par définition).
   Ainsi, $f(x, y) = xy \in \mathcal{D}(ab)$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est à valeurs dans } \mathcal{D}(ab).}$
4. Par définition, $u \wedge v$ divise u. Or, u divise a donc par transitivité $u \wedge v$ divise a.
   De même, $u \wedge v$ divise v. Or, v divise b donc $u \wedge v$ divise b.
   Ainsi $u \wedge v$ divise a et b donc $u \wedge v$ divise $a \wedge b = 1$.
   Puisque $u \wedge v > 0$, ceci implique que $\boxed{u \wedge v = 1.}$
5. Montrons que f est injective.
   Soient $(x, y) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ et $(x', y') \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ tels que $f(x, y) = f(x', y')$, i.e. $xy = x'y'$. Montrons que $(x, y) = (x', y')$.
   En particulier, x divise $x'y'$. Or, puisque x divise a et y' divise b, on sait d'après la question précédente que $x \wedge y' = 1$. On déduit alors du lemme de Gauss que x divise x'. On montre de même que x' divise x donc $|x| = |x'|$, puis $x = x'$ puisque ce sont des entiers positifs.
   En raisonnant de manière symétrique, on montre de même que $y = y'$ donc $(x, y) = (x', y')$.
   On en conclut bien que $\boxed{f \text{ est injective.}}$
6. Soit $d \in \mathcal{D}(ab)$. Montrons qu'il existe $(x, y) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ tel que $f(x, y) = d$, i.e. $xy = d$.
   Posons $x = a \wedge d$ et $y = b \wedge d$. Par définition, on a bien $x \in \mathcal{D}(a)$ et $y \in \mathcal{D}(b)$.
   Montrons qu'on a bien $xy = d$.
   Par définition, x divise d et y divise d. Or, puisque $x \in \mathcal{D}(a)$ et $y \in \mathcal{D}(b)$, d'après la question 4, on sait que $x \wedge y = 1$. On déduit alors du lemme d'Euclide que xy divise d.
   Réciproquement, montrons que d divise xy.
   Puisque $x = a \wedge d$, d'après l'identité de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = au + dv$.
   De même, il existe $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y = bu' + dv'$.
   En multipliant ces deux identités de Bézout, on obtient

$$xy = (ab)(uu') + d(bu'v + dvv' + auv').$$

   Or, d divise ab par définition donc d divise $(ab)(uu') + d(bu'v + dvv' + auv')$, i.e. d divise xy.
   Puisque x, y et d sont positifs, on en conclut que $d = xy = f(x, y)$.
   On a donc bien montré que $\boxed{f \text{ est surjective.}}$
7. D'après les deux questions précédentes, on en conclut que f est bijective. Ainsi, pour tout $k \in \mathcal{D}(a, b)$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ tel que $xy = k$.
   On a alors

$$S(ab) = \sum_{k \in \mathcal{D}(ab)} k = \sum_{(x,y) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)} xy = \left(\sum_{x \in \mathcal{D}(a)} x\right)\left(\sum_{y \in \mathcal{D}(b)} y\right)$$

   d'où $\boxed{S(ab) = S(a)S(b).}$

8. Considérons la décomposition en facteurs premiers de n :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{v_{p_i}(n)}$$

où $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts. Ainsi, les nombres $(p_i^{v_{p_i}(n)})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont deux à deux premiers entre eux, ce qui implique d'après la question précédente que

$$S(n) = \prod_{i=1}^{r} S\left(p_i^{v_{p_i}(n)}\right).$$

D'après la question 2, on en conclut alors que

$$\boxed{S(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{v_{p_i}(n)+1} - 1}{p_i - 1}.}$$

Partie III : Nombres parfaits pairs

1. Soit $n = \dfrac{1}{2}M_p(M_p+1) = \dfrac{1}{2}(2^p - 1) \times 2^p = (2^p - 1) \times 2^{p-1}$. Puisque p est un nombre premier, on a $p > 1$ donc n est un nombre pair. Montrons que n est parfait.
Les seuls diviseurs de 2^p étant des puissances de 2 et $2^p - 1$ étant impair, on a $(2^p - 1) \wedge 2^{p-1} = 1$ donc
$$S(n) = S(2^p - 1)S(2^{p-1}).$$
Par hypothèse $M_p = 2^p - 1$ est premier donc d'après la question 1 de la partie II, on a $S(2^p - 1) = 2^p - 1 + 1 = 2^p$.
Par ailleurs, d'après la question 2 de la partie II, on a $S(2^{p-1}) = \dfrac{2^{p-1+1} - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$.
Ainsi, $S(n) = 2^p(2^p - 1) = 2n$ donc $\boxed{n = \frac{1}{2}M_p(M_p+1) \text{ est un nombre parfait pair.}}$

2. (a) Supposons par l'absurde que n n'ait pas de facteur premier impair. Alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^a$. D'après la question 2 de la partie II, on a alors
$$S(n) = S(2^a) = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} = 2^{a+1} - 1 \neq 2n$$
donc n ne serait pas parfait.
Ainsi, $\boxed{n \text{ a au moins un facteur premier impair.}}$
Puisque n est pair, $a = v_2(n) > 0$ et puisque n a au moins un facteur premier impair, il existe des nombres premiers impairs $(p_1, \ldots, p_r)$ (donc supérieurs à 3) tels que $n = 2^a \prod_{i=1}^{r} p_i^{v_{p_i}(n)}$. En posant $b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{v_{p_i}(n)}$, on a bien $b \geqslant 3$ qui est un entier impair tel que $\boxed{n = 2^a b.}$

   (b) Puisque n est parfait, on sait que $S(n) = 2n$.
Puisque b est impair, 2^a et b sont premiers entre eux donc
$$2^{a+1}b = 2n = S(n) = S(2^a)S(b) = (2^{a+1} - 1)S(b).$$
Ainsi, $2^{a+1} - 1$ divise $2^{a+1}b$. Or, $(2^{a+1} - 1) \wedge 2^{a+1} = 1$ donc on déduit du lemme de Gauss que $2^{a+1} - 1$ divise b. Il existe ainsi un entier $c \in \mathbb{N}^*$ ($c \neq 0$ car $b \neq 0$) tel que $(2^{a+1} - 1)c = b$.

En injectant cette expression de b dans l'égalité $2^{a+1}b = (2^{a+1}-1)S(b)$, on obtient $2^{a+1}(2^{a+1}-1)c = (2^{a+1}-1)S(b)$ d'où, en simplifiant par $2^{a+1}-1 \neq 0$, on obtient bien

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} b & = & (2^{a+1}-1)c \\ S(b) & = & 2^{a+1}c \end{array}\right. .}$$

(c) D'après la question précédente, c est un diviseur de b. Par ailleurs, puisque $a \in \mathbb{N}^*$, $2^{a+1}-1 > 1$ donc l'égalité $b = (2^{a+1}-1)c$ implique que $c < b$.

Supposons un instant que $c \neq 1$. Alors $1, c$ et b seraient trois diviseurs positifs distincts de b donc on aurait $S(b) \geqslant 1 + b + c > b + c$.

Or, d'après la question précédente $S(b) = b + c$. Il est donc absurde que $c \neq 1$ et on en conclut que $\boxed{c = 1.}$

(d) Puisque $c = 1$, on a $S(b) = 2^{a+1} = (2^{a+1}-1) + 1 = b + 1$.

D'après la question 1 de la partie II, ceci implique que $\boxed{b \text{ est premier.}}$

Or, $b = 2^{a+1} - 1 = M_{a+1}$. D'après les résultats de la Partie I, puisque le nombre de Mersenne M_{a+1} est premier, ceci implique que $\boxed{a+1 \text{ est premier.}}$

(e) Posons $p = a + 1$. On a alors

$$n = 2^a b = 2^{p-1}(2^p - 1) = \frac{1}{2}M_p(M_p + 1).$$

Finalement, on a bien montré le résultat suivant :

$$\boxed{\text{un entier pair } n \text{ est parfait si et seulement s'il existe un } M_p \text{ premier tel que } n = \frac{1}{2}M_p(M_p+1).}$$

3. • Pour $p = 2$, le nombre de Mersenne $M_2 = 2^2 - 1 = 3$ est premier donc

$$n = \frac{1}{2}M_2(M_2 + 1) = 6$$

est un nombre parfait pair.

• Pour $p = 3$, le nombre de Mersenne $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ est premier donc

$$n = \frac{1}{2}M_3(M_3 + 1) = 28$$

est un nombre parfait pair.

• Pour $p = 5$, le nombre de Mersenne $M_5 = 2^5 - 1 = 31$ est premier donc

$$n = \frac{1}{2}M_5(M_5 + 1) = 496$$

est un nombre parfait pair.

$\boxed{\text{Les trois premiers nombres parfaits pairs sont donc } 6, 28 \text{ et } 496.}$

Question bonus : Soit n un entier parfait impair (s'il existe). On a déjà remarqué que 1 n'est pas parfait, donc on a nécessairement $n \geqslant 3$ et ses diviseurs premiers sont forcément impairs.

• Supposons que n admette un seul facteur premier, i.e. il existe un nombre premier impair $p \geqslant 3$ et un entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^\alpha$. On a vu en Partie II que $S(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

Puisque n est parfait, on aurait alors $S(n) = 2n$, ce qui équivaut à

$$p^{\alpha+1} - 1 = 2n(p-1) = 2p^{\alpha}(p-1) = 2p^{\alpha+1} - 2p^{\alpha}$$

d'où $2p^{\alpha} - p^{\alpha+1} = 1$, i.e. $p^{\alpha}(2-p) = 1$, ce qui implique que $1 < 0$ (puisque $p > 2$). C'est donc absurde !

• Supposons que n admette deux diviseurs premiers impairs distincs $p_1 < p_2$, i.e. il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta}$. On a nécessairement $p_1 \geqslant 3$ et $p_2 \geqslant 5$.

On sait que $S(n) = S(p_1^{\alpha})S(p_2^{\beta}) = \dfrac{p_1^{\alpha+1} - 1}{p_1 - 1} \times \dfrac{p_2^{\beta+1} - 1}{p_2 - 1} = 2n = 2p_1^{\alpha}p_2^{\beta}$ d'où en divisant par $p_1^{\alpha}p_2^{\beta}$, on obtient

$$2 = \frac{p_1 - \frac{1}{p_1^{\alpha}}}{p_1 - 1} \times \frac{p_2 - \frac{1}{p_2^{\alpha}}}{p_2 - 1} = \frac{1 - \frac{1}{p_1^{\alpha+1}}}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1 - \frac{1}{p_2^{\alpha+1}}}{1 - \frac{1}{p_2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}.$$

Or, $p_1 \geqslant 3$ donc $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{3}$ donc $1 - \frac{1}{p_1} \geqslant \frac{2}{3}$ d'où $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

De même, $p_2 \geqslant 5$ donc $\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{1}{5}$ donc $1 - \frac{1}{p_2} \geqslant \frac{4}{5}$ d'où $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \leqslant \dfrac{5}{4}$. Ainsi,

$$2 < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2,$$

d'où $2 < 2$, ce qui est absurde !

On en conclut que

$$\boxed{\text{si un nombre impair est parfait, alors il admet au moins trois diviseurs premiers distincts.}}$$

Problème 3 : Birapport de quatre nombres complexes

1. Puisque a, b et c sont alignés, il existe un réel λ non nul tel que $(c - a) = \lambda(c - b)$, i.e. $\dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$.

   On a alors les équivalences suivantes :

   $$[a, b, c, d] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda\frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R} \overset{\lambda \in \mathbb{R}^*}{\Longleftrightarrow} \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a, b, d \text{ sont alignés.}$$

   Puisque a, b, c sont alignés, a, b, d sont alignés si et seulement si a, b, c et d sont alignés.

   On a donc bien montré que $\boxed{[a, b, c, d] \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a, b, c \text{ et } d \text{ sont alignés.}}$

2. (a) On sait que $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta[2\pi]$.

   Ainsi, puisque $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}, e^{i\alpha} \neq e^{i\gamma}$ et $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$, on a $\alpha \not\equiv \beta[2\pi], \alpha \not\equiv \gamma[2\pi]$ et $\beta \not\equiv \gamma[2\pi]$ d'où $\dfrac{\alpha - \beta}{2} \not\equiv 0[\pi]$, $\dfrac{\alpha - \gamma}{2} \not\equiv 0[\pi]$ et $\dfrac{\beta - \gamma}{2} \not\equiv 0[\pi]$.

   Puisque $\sin(\theta) \in \mathbb{R} = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$, on en déduit que

   $$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \text{ sont non nuls.}}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] &= \frac{(e^{i\gamma} - e^{i\alpha})(z - e^{i\beta})}{(z - e^{i\alpha})(e^{i\gamma} - e^{i\beta})} \\ &= \frac{e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}})(z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})}{(z - e^{i\alpha})(\overline{z} - e^{-i\alpha})e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\gamma-\beta}{2}})} \\ &= \frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times 2i\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})(z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})}{(z - e^{i\alpha})(\overline{z - e^{i\alpha}}) \times 2i\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})} \\ &= \frac{-e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})(z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})}{-|z - e^{i\alpha}|^2 \times \sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{(z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})}{|z - e^{i\alpha}|^2}}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha}) &= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}(|z|^2 - e^{-i\alpha}z - e^{i\beta}\overline{z} + e^{i(\beta-\alpha)}) \\ &= |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\overline{z}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha}) = |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + D}$ où

$$D = -e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\overline{z} = -\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z + \overline{e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z}\right) = -2\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z\right) \in \mathbb{R}.$$

(d) Puisque $\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \times |z - e^{i\alpha}|^2} \in \mathbb{R}$, en utilisant le résultat de la question b, on a

$$\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \times |z - e^{i\alpha}|^2} \times \mathrm{Im}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})).$$

D'après la question précédente, on a par ailleurs $\mathrm{Im}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})) = \mathrm{Im}(|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}})$ car $D \in \mathbb{R}$.
Or, $|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} = |z|^2(\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})) + (\cos(\frac{\beta-\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2}))$ d'où

$$\mathrm{Im}(|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = |z|^2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = (|z^2| - 1)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

par imparité de sin.

On trouve bien $\boxed{\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2 - 1}{|z - e^{i\alpha}|^2}}$.

(e) D'après la question a), $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls donc on a bien les équivalences

$$\begin{aligned}
\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow |z| = 1 \quad \text{car } |z| \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \boxed{z \in \mathbb{U}.}
\end{aligned}$$

3. (a) On cherche à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda a + \mu & = & 1 \\ \lambda\omega + \mu & = & 0 \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda(a-\omega) & = & 1 \\ \lambda\omega + \mu & = & 0 \end{array}\right. \overset{a \neq \omega}{\Longleftrightarrow} \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{1}{a-\omega} \\ \mu & = & -\frac{\omega}{a-\omega} \end{array}\right. .}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $h(z) = \lambda z + \mu = \dfrac{z-\omega}{a-\omega}$.
On a alors les équivalences

$$|h(z)| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-\omega|}{|a-\omega|} = 1 \Leftrightarrow |z-\omega| = |a-\omega|.$$

Puisque $|a-\omega| = R$, on en déduit que $\boxed{|h(z)| = 1 \Leftrightarrow |\omega - z| = R.}$
Puisque $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = R$, on déduit de ce qui précède que $|h(a)| = |h(b)| = |h(c)| = 1$.
Par caractérisation des nombres complexes de module 1, on en déduit qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $\boxed{h(a) = e^{i\alpha}, h(b) = e^{i\beta} \text{ et } h(c) = e^{i\gamma}.}$

(c) Soit $z' \in \mathbb{C}$. Montrons qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $h(z) = z'$. On a les équivalences suivantes :

$$h(z) = z' \Leftrightarrow \frac{z-\omega}{a-\omega} = z' \Leftrightarrow z = (a-\omega)z' + \omega$$

donc tout nombre complexe z' admet un unique antécédent dans $\mathbb{C}$ par h, ce qui prouve que $\boxed{h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ est bijective.}}$
En particulier, h est injective, ce qui signifie que deux nombres complexes différents ont des images différentes par h.
Puisque a, b, c et d sont deux à deux distincts, on en déduit que $h(a), h(b), h(c)$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts, i.e. $\boxed{e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma} \text{ et } h(d) \text{ sont deux à deux distincts.}}$

(d) On pose $z = h(d)$. D'après la question précédente, $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts, ce qui permet de calculer leur birapport. Par définition, on a

$$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [h(a), h(b), h(c), h(d)] = \frac{(h(c)-h(a))(h(d)-h(b))}{(h(d)-h(a))(h(c)-h(b))}.$$

Or, $h(c) - h(a) = \dfrac{c-\omega}{a-\omega} - \dfrac{a-\omega}{a-\omega} = \dfrac{c-a}{a-\omega}$. Les autres calculs étant similaires, on obtient

$$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \frac{\frac{c-a}{a-\omega}\frac{d-b}{a-\omega}}{\frac{d-a}{a-\omega}\frac{c-b}{a-\omega}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

d'où $\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [a, b, c, d]}$.

(e) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \boxed{[a,b,c,d] \in \mathbb{R}} & \Leftrightarrow & [e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R} & \text{d'après la question précédente} \\ & \Leftrightarrow & z = h(d) \in \mathbb{U} & \text{d'après } 2.(e) \\ & \Leftrightarrow & \boxed{|\omega - d| = R} & \text{d'après } 3.(b) \end{array}$$

4. Soient a, b, c, d quatre nombre complexes deux à deux distincts.

   • Supposons que trois de ces quatre points sont alignés. D'après la question 1, leur birapport est réel si et seulement si ces quatre points sont alignés.

   • Supposons que trois quelconques de ces quatre points ne sont pas alignés. Notons ω le centre du cercle circoncrit du triangle abc, qui est de rayon R. D'après la question précédente, leur birapport est réel si et seulement si d appartient au cercle de centre ω et de rayon R, c'est à dire si et seulement si a, b, c et d sont cocyliques.

   Finalement,

$$\boxed{a, b, c, d \text{ sont alignés ou cocyliques si et seulement si } [a, b, c, d] \in \mathbb{R}.}$$

5. (a) C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned} & \boxed{[a,c,b,d] \times [a,d',d,a'] \times [a,b',a',b] \times [c',b,b',c] \times [c',a',d',b'] \times [c',d,c,d']} \\ = \; & \frac{(b-a)(d-c)}{(d-a)(b-c)} \frac{(d-a)(a'-d')}{(a'-a)(d-d')} \frac{(a'-a)(b-b')}{(b-a)(a'-b')} \frac{(b'-c')(c-b)}{(c-c')(b'-b)} \frac{(d'-c')(b'-a')}{(b'-c')(d'-a')} \frac{(c-c')(d'-d)}{(d'-c')(c-d)} \\ = \; & \frac{(d-c)(a'-d')(b-b')(c-b)(b'-a')(d'-d)}{(c-d)(d'-a')(b'-b)(b-c)(a'-b')(d-d')} \\ = \; & (-1)^6 \\ = \; & \boxed{1}. \end{aligned}$$

   (b) Puisque a, a', d, d' appartiennent au cercle $\mathcal{C}_1$, ils sont cocyliques donc $[a, d', d, a'] \in \mathbb{R}$. En raisonnant sur les cercles $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, on montre de même que $[a, b', a', b] \in \mathbb{R}$, $[c', b, b', c] \in \mathbb{R}$ et $[c', d, c, d'] \in \mathbb{R}$.

   • Supposons que a, b, c, d sont alignés ou cocyliques. D'après la question 4, on en déduit que $[a, c, b, d]$ est réel.

   D'après la question précédente et les constatations précédentes, on en déduit que

$$[c', a', d', b'] = \frac{1}{[a,c,b,d] \times [a,d',d,a'] \times [a,b',a',b] \times [c',b,b',c] \times [c',d,c,d']} \in \mathbb{R},$$

   ce qui implique d'après la question 4 que a', b', c' et d' sont alignés ou cocycliques.

   • Réciproquement, supposons que a', b', c', d' sont alignés ou cocycliques. D'après la question 4, on en déduit que $[c', a', d', b']$ est réel.

   D'après la question précédente et les constatations précédentes, on en déduit que

$$[a, c, b, d] = \frac{1}{[a,d',d,a'] \times [a,b',a',b] \times [c',b,b',c] \times [c',a',d',b'] \times [c',d,c,d']} \in \mathbb{R},$$

   ce qui implique d'après la question 4 que a, b, c et d sont alignés ou cocycliques.

   On en conclut que

$$\boxed{a, b, c, d \text{ sont alignés ou cocyliques si et seulement si } a', b', c', d' \text{ le sont.}}$$