Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°3

Samedi 25 novembre 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué d'un exercice, de trois problèmes et comporte 7 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. (a) A l'aide des nombres complexes, linéariser $\sin^3(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} y(x) = (1+x^2)\sin^3(x).$$

Problème 1 : Racines de solutions d'équations du second ordre

On s'intéresse dans ce problème aux solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}$) des équations différentielles

$$(E_q) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, y'' + q(x)y(x) = 0,$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
• Lorsque q n'est pas constante, on ne sait pas exprimer en général les solutions de (E_q) à l'aide de fonctions usuelles.
• On admet que le résultat du cours sur l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'ordre 2 reste vrai pour les équations (E_q), lorsque q est continue.
• On appelle *racine* d'une solution f de (E_q) tout réel x tel que $f(x) = 0$, et deux racines $x_1 < x_2$ sont dites *consécutives* lorsque f ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$.

Ce problème est constitué de quatre parties. Les deux premières sont indépendantes, tandis que les deux dernières utilisent des résultats établis dans les deux premières.

Partie I : Cas où q est constante strictement positive

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Exprimer les solutions réelles de

$$(E_k) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + ky(x) = 0.$$

2. Démontrer que toute solution non nulle a une infinité de racines et que deux racines consécutives sont distantes de $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Partie II : Entrelacement de racines

Dans cette partie, on fixe deux fonctions continues $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \leqslant q(x).$$

On considère les deux équations différentielles :

$$(E_p) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + p(x)y(x) = 0$$

et

$$(E_q) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de (E_p) et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de (E_q).

1. Montrer que la fonction $-f$ est également une solution non nulle de (E_p).

Pour tout réel x, on note $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.

2. Justifier que la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable puis exprimer $W'(x)$ pour tout réel x en fonction de $f(x), g(x), p(x)$ et $q(x)$.

Soient a et b (avec $a < b$) deux racines consécutives de f.

3. Montrer que f est de signe constant sur $]a, b[$.

Quitte à changer f en $-f$, on supposera dans la suite que pour tout $x \in]a, b[, f(x) > 0$.

4. Montrer que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont non nuls.
5. En exprimant ces nombres dérivés comme limites de taux d'accroissement, montrer que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
6. En raisonnant par l'absurde et en considérant la monotonie de W, montrer que g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

On a ainsi montré qu'entre deux racines de f, il y a toujours une racine de g.

Partie III : Estimations de q et racines d'une solution

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et g une solution non nulle de (E_q).

1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, q(x) \geqslant k$.
   Montrer que g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.
   Indication : remarquer que pour tout réel $a, x \mapsto \sin(\sqrt{k}(x-a))$ est une solution non nulle de (E_k).
2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, q(x) \leqslant k$.
   Montrer que g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Partie IV : Application à l'équation de Bessel

On fixe un réel positif α et on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (dite de Bessel) :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0.$$

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Vérifier que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle
   $$(E') : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, z''(x) + \left(1 - \frac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) z(x) = 0.$$
2. Soit f une solution non nulle de (E).
   Déduire de ce qui précède que si $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors f s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π, et si $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors f s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π.

Problème 2 : Nombres parfaits pairs

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ (y compris 1 et n).
Ainsi, $S(1) = 1, S(2) = 1 + 2 = 3, S(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$...
Un entier naturel n non nul est dit *parfait* si $S(n) = 2n$.
Le but de ce problème est de caractériser les nombres parfaits pairs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.
Ainsi, on a l'égalité :

$$S(n) = \sum_{k \in \mathcal{D}(n)} k.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$. Ce nombre est appelé *n-ème nombre de Mersenne*.
On rappelle que pour tout couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \neq (0, 0)$, on note $a \wedge b$ le pgcd de a et b.

Partie I : Nombres de Mersenne

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, a - b$ divise $a^n - b^n$.
2. Soient n et m deux entiers positifs et $a > 1$ un entier.
   Montrer que $a^m - 1$ divise $a^n - 1$ si et seulement si m divise n.
3. Soit $a > 2$ un entier. Montrer que pour tout entier $n > 1$, $a^n - 1$ n'est pas premier.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Ainsi, pour que le nombre de Mersenne M_n soit premier, il est nécessaire que n soit premier.
En revanche, ce n'est pas suffisant : 11 est premier mais $2^{11} - 1$ ne l'est pas.

Partie II : Calcul de $S(n)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est premier si et seulement si $S(n) = n + 1$.
2. Soit p un nombre premier, soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathcal{D}(p^n)$ et montrer que

$$S(p^n) = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

Dans la suite de cette partie, on considère deux entiers naturels non nuls a et b tels que $a \wedge b = 1$ et on montre que $S(ab) = S(a)S(b)$.
Soit f l'application définie sur $\mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$ par $f(x, y) = xy$.

3. Montrer que f est à valeurs dans $\mathcal{D}(ab)$.
4. Montrer que si u et v sont deux entiers relatifs tels que u divise a et v divise b, alors $u \wedge v = 1$.
5. En déduire que f est injective.
6. Montrer que $f : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) \longrightarrow \mathcal{D}(ab)$ est surjective.
   Indication : considérer $d \in \mathcal{D}(ab)$ et $x = d \wedge a$.
7. En conclure que $S(ab) = S(a)S(b)$.
8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En utilisant la décomposition en facteurs premiers de n, exprimer $S(n)$ sous la forme d'un produit.

Partie III : Nombres parfaits pairs

Le but de cette partie est de montrer qu'un entier pair n est parfait si et seulement s'il existe un entier p premier tel que $n = \frac{1}{2}M_p(M_p+1)$ avec M_p un nombre de Mersenne premier.

1. Soit p un nombre premier tel que M_p est premier. Montrer que $\frac{1}{2}M_p(M_p+1)$ est un nombre parfait pair.
2. On considère désormais n un nombre parfait pair.
   (a) Montrer que n a au moins un facteur premier impair. Justifier qu'il existe alors $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geqslant 3$ un entier impair tel que $n = 2^a b$.
   (b) Montrer qu'il existe c dans $\mathbb{N}^*$ tel que
   $$\begin{cases} b &= (2^{a+1}-1)c \\ S(b) &= 2^{a+1}c \end{cases}.$$
   (c) Montrer par l'absurde que $c = 1$.
   (d) En déduire que b est premier puis que $a+1$ est premier.
   (e) Conclure.
3. Donner les trois premiers nombres parfaits pairs.

La question de l'existence d'un nombre parfait impair reste un problème ouvert : on n'en connaît toujours pas en 2025 ! Néanmoins, on sait qu'un tel entier, s'il existe, doit vérifier certaines propriétés.
Question bonus : Montrer que si un entier n est parfait et impair, alors il admet au moins trois diviseurs premiers distincts.

Problème 3 : Birapport de quatre nombres complexes

On rappelle que si $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ sont trois points deux à deux distincts du plan $\mathbb{R}^2$, ils sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$

Dans tout ce problème, on identifiera les points du plan $\mathbb{R}^2$ à leurs affixes complexes. On dira donc que trois nombres complexes a, b et c sont *alignés* si les trois points du plan A, B et C d'affixes respectives a, b et c le sont.
Ainsi, si a, b et c sont trois nombres complexes distincts, ils sont alignés si et seulement s'il existe un réel λ non nul tel que $(c-a) = \lambda(c-b)$.
Enfin, on rappelle qu'on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Etant donnés quatre nombres complexes a, b, c et d deux à deux distincts, on définit le *birapport* de a, b, c et d, noté $[a, b, c, d]$, par le nombre complexe

$$[a,b,c,d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

Le but de ce problème est de montrer que quatre nombres complexes deux à deux distincts sont alignés ou cocycliques (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle) si et seulement si leur birapport est réel. La dernière question de ce problème est une application de ce résultat.

1. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On suppose que a, b et c sont alignés. Montrer que les quatre points a, b, c et d sont alignés si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

2. Soient α, β, γ trois réels et z un nombre complexe. On suppose que $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.
   (a) Traduire le fait que $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}, e^{i\alpha} \neq e^{i\gamma}$ et $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$ à l'aide de congruences. En déduire que $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.
   (b) Montrer que
$$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{|z-e^{i\alpha}|^2}.$$
   (c) Montrer que
$$e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha}) = |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + D$$
   où D est un réel que l'on exprimera en fonction de z, α et β.
   (d) En déduire que
$$\operatorname{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}.$$
   (e) En conclure que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.
3. Dans cette question, a, b, c et d sont quatre nombres complexes deux à deux distincts doint trois quelconques ne sont pas alignés. Puisque a, b et c ne sont pas alignés, on peut considérer $\omega \in \mathbb{C}$ le centre du cercle circonscrit au triangle abc. On rappelle que ω est le point d'intersection des médiatrices du triangle abc et qu'on a donc
$$|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = R$$
   où R est un réel strictement positif.
   (a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a + \mu = 1$ et $\lambda\omega + \mu = 0$.

   Dans la suite de cette question, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}, h(z) = \lambda z + \mu$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)| = 1$ si et seulement si $|\omega - z| = R$. En déduire l'existence de trois réels α, β, γ tels que $h(a) = e^{i\alpha}, h(b) = e^{i\beta}$ et $h(c) = e^{i\gamma}$.
   (c) Montrer que $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bijective. En déduire que les quatre nombres complexes $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.
   (d) On pose $z = h(d)$. Montrer que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [a, b, c, d]$.
   (e) En déduire que $[a, b, c, d]$ est réel si et seulement si $|\omega - d| = R$.
4. Déduire de ce qui précède que quatre nombres complexes deux à deux distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.
5. On considère quatre cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. On suppose que :
   - $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points a et a';
   - $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en deux points b et b';
   - $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en deux points c et c';
   - $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en deux points d et d';
   - les huits points précédents sont deux à deux distincts (voir figure ci-dessous).

(a) Montrer la formule dite des six birapports :

$$[a, c, b, d] \times [a, d', d, a'] \times [a, b', a', b] \times [c', b, b', c] \times [c', a', d', b'] \times [c', d, c, d'] = 1.$$

(b) Démontrer le théorème de Miquel suivant : a, b, c et d sont alignés ou cocycliques si et seulement si a', b', c' et d' le sont.