

## 13

## Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, on travaille sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 13.1 Généralités sur les systèmes linéaires

### 13.1.1 Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues

#### Définition 1

Soient  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{K}^{np}$  et  $(b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ .

• On appelle système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  un système de la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

qui peut s'écrire de manière condensée

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j = b_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j}x_j = b_n \end{cases}$$

Résoudre un tel système revient à trouver tous les  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  qui satisfont ces  $n$  équations.

On dit que le système est homogène si tous les seconds membres sont nuls, c'est à dire si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $b_i = 0$ .

**Définition 2: Systèmes compatibles**

- On dit qu'un système linéaire est compatible s'il possède des solutions, incompatible dans le cas contraire.
- Un système linéaire est dit de Cramer si  $n = p$  et s'il possède une unique solution.

**Remarque 1.** Tout système linéaire homogène est compatible puisque le  $p$ -uplet nul  $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$  en est toujours solution. Mais il possède peut-être d'autres solutions.

**Exemple 1.** • Considérons le système 
$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$$

Le triplet  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  est solution du système. Mais ce n'est pas la seule solution. En effet, on constate que pour tout réel  $t$ , le triplet  $(x, y, z) = (t, t, 0)$  est solution donc le système possède une infinité de solutions.

- Le système 
$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ -x - y &= 0 \end{cases}$$
 est incompatible puisque  $x + y = 1 \Rightarrow -x - y = -1 \neq 0$ .

• Le système 
$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= -1 \end{cases}$$
 est un système de Cramer : en effet, en sommant les deux lignes du système, on trouve  $x = 0$  et on en déduit que  $y = 1$ . Ainsi, l'unique solution du système est  $(x, y) = (0, 1)$ .

**13.1.2 Opérations élémentaires****Définition 3: Opérations élémentaires**

Soit  $(S)$  un système linéaire. On appelle opérations élémentaires sur les lignes du système  $(S)$  les trois types d'opérations suivants :

- échange de la ligne  $L_i$  et de la ligne  $L_j$ , que l'on note  $L_i \leftrightarrow L_j$ ;
- si  $i \neq j$ , pour tout réel  $\lambda$ , ajout de la ligne  $\lambda L_j$  à la ligne  $L_i$ , que l'on note  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ;
- pour tout réel  $\lambda \neq 0$ , multiplication de  $L_i$  par  $\lambda$ , que l'on note  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .

**Remarque 2.** Soit  $(S)$  un système linéaire auquel on applique une opération élémentaire afin d'obtenir un nouveau système  $(S')$ . On peut réobtenir  $(S)$  en appliquant une opération élémentaire à  $(S')$ . Autrement dit, pour défaire une opération élémentaire, il suffit de refaire une opération élémentaire.

- Si on applique l'opération  $L_i \leftrightarrow L_j$  au système  $(S)$ , il faut réappliquer la même opération au système  $(S')$  obtenu pour réobtenir  $(S)$ .
- Si on applique l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  au système  $(S)$ , il faut appliquer l'opération  $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$  au système  $(S')$  obtenu pour réobtenir  $(S)$ .
- Si on applique l'opération  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  (avec  $\lambda \neq 0$ ) au système  $(S)$ , il faut appliquer l'opération  $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$  au système  $(S')$  obtenu pour réobtenir  $(S)$ .

**Définition 4: Systèmes équivalents**

Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

**Remarque 3.** On a donc montré dans la remarque précédente que c'est une notion symétrique : si on peut passer d'un système à un autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut le faire dans l'autre sens. Ceci justifie la définition de deux systèmes équivalents.

**Proposition 1**

Deux systèmes équivalents possèdent le même ensemble de solutions.

**Démonstration.** Soit  $(S)$  un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Vérifions que chacune des opérations élémentaires préserve l'ensemble des solutions d'un système.

Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est une solution du système  $(S)$ , alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a

$$\sum_{k=1}^p a_{i,k} x_k = b_i \text{ et } \sum_{k=1}^p a_{j,k} x_k = b_j,$$

ce qui signifie que  $(x_1, \dots, x_p)$  est solution de l'équation en ligne  $L_i$  et en ligne  $L_j$ .

Clairement,  $(x_1, \dots, x_p)$  restera solution du système si on échange les lignes  $L_i$  et  $L_j$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puisque

$$\sum_{k=1}^p (a_{i,k} + \lambda a_{j,k}) x_k = \sum_{k=1}^p a_{i,k} x_k + \lambda \sum_{k=1}^p a_{j,k} x_k = b_i + \lambda b_j,$$

$(x_1, \dots, x_p)$  est toujours solution du système obtenu en ajoutant  $\lambda L_j$  à la ligne  $L_i$ .

Enfin, si  $\lambda \neq 0$ , alors

$$\sum_{k=1}^p \lambda a_{i,k} x_k = \lambda \sum_{k=1}^p a_{i,k} x_k = \lambda b_i$$

donc  $(x_1, \dots, x_p)$  est toujours solution du système obtenu en multipliant  $L_i$  par  $\lambda$ .

Ainsi, si on obtient un système  $(S')$  en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes du système  $(S)$ , les solutions de  $(S)$  sont également solutions de  $(S')$ .

Réciproquement, on a montré qu'on pouvait réobtenir  $(S)$  à partir de  $(S')$  en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, donc les solutions de  $(S')$  sont également solutions de  $(S)$ .

On en conclut que deux systèmes équivalents admettent les mêmes solutions. ■

Il reste à voir une méthode de résolution efficace pour les systèmes linéaires : c'est l'objet de la section suivante.

## 13.2 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss

### 13.2.1 Systèmes échelonnés

#### Définition 5: Systèmes échelonnés

Un système est dit échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul ;
- dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croît strictement.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul.

**Exemple 2.** Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} \boxed{2}x + y - z - 3t = 3 \\ \quad \boxed{-5}y + t = -1 \\ \quad \quad 0 = 0 \end{cases}$$

On remarque l'existence d'un pivot dans les deux premières lignes : 2 et  $-5$ .

Le système suivant est également échelonné :

$$\begin{cases} \boxed{2}x + y - z - 3t = 3 \\ y - 5y + t = -1 \\ -3t = 1 \end{cases}$$

Le système suivant n'est pas échelonné

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ y - 2z = -2 \\ -y + 3z = -1 \end{cases}$$

Pour obtenir un système échelonné à partir d'un système linéaire quelconque, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss.

### 13.2.2 Algorithme du pivot de Gauss

Soit  $(S)$  un système linéaire à  $n$  équations et à  $p$  inconnues  $(x_1, \dots, x_p)$ .

L'algorithme du pivot de Gauss permet d'obtenir un système échelonné en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de  $(S)$ , qui sera plus facile à résoudre. Le principe de cette méthode réside en la création de pivots à chaque étape.

**Étape 1 :** Il existe nécessairement un indice  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que le coefficient devant  $x_1$  en ligne  $i$  est non nul (sinon le système ne serait pas une équation à  $p$  inconnues!). Quitte à appliquer l'opération  $L_1 \leftrightarrow L_i$ , on peut supposer que le coefficient  $a_{1,1}$  devant  $x_1$  est un réel non nul.

Pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on effectue l'opération  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$  (ou  $L_i \leftarrow a_{1,1}L_i - a_{i,1}L_1$ ). Ce faisant, on a créé un premier pivot,  $a_{1,1}$ .

**Étape 2 :** Soit  $i$  le plus petit indice strictement supérieur à 1 tel qu'un terme  $x_i$  apparaisse encore dans le système (en dehors de la ligne 1). Quitte à procéder à un nouvel échange de lignes, on peut faire en sorte que le coefficient devant  $x_i$  en deuxième ligne soit non nul. En faisant comme à la première étape, on annule tous les autres termes  $x_i$  en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

En répétant ces deux étapes autant que nécessaire, on obtient nécessairement un système échelonné.

**Exemple 3.** Echelonons le système suivant en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -x - 5y + z = -1 \\ 4x - 2y - 3z = 0 \end{cases} & \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1} \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -9y + z = 1 \\ -4y - z = -6 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 9L_3 - 4L_2]{L_1 \leftarrow 9L_1 + L_2} \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -9y + z = 1 \\ -4y - z = -6 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 18x + \phantom{-} - 8z = 28 \\ \phantom{18x} - 9y + z = 1 \\ \phantom{18x} - 13z = -58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{46}{13} \\ y = \frac{5}{13} \\ z = \frac{58}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

## 13.3 Ensemble des solutions d'un système linéaire

### 13.3.1 Rang d'un système

#### Définition 6: Rang d'un système échelonné

Soit  $(S)$  un système échelonné.

On appelle rang du système  $(S)$  son nombre de pivots.

**Exemple 4.** Reprenons les deux systèmes échelonnés de l'exemple 2. Le premier système est de rang 2 tandis que le deuxième est de rang 3.

#### Définition 7: Rang d'un système

Soit  $(S)$  un système.

On appelle rang du système  $(S)$  le rang de tout système échelonné équivalent.

Autrement dit, c'est le nombre de pivots du système échelonné obtenu après avoir effectué l'algorithme du pivot de Gauss sur le système  $(S)$ .

**Remarque 4.** On admet pour l'instant que deux systèmes échelonnés équivalents ont même rang. Nous le démontrerons dans le cours d'algèbre linéaire.

**Exemple 5.** Le système de l'exemple 3 est de rang 3.

### 13.3.2 Résolution d'un système

Après avoir échelonné un système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient un système plus simple à résoudre qui peut prendre différentes formes :

- un système triangulaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \boxed{a_{1,1}}x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1,n}x_n = b_1 \\ & & \boxed{a_{2,2}}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n = b_2 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \boxed{a_{n-1,n-1}}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ & & & & & & \boxed{a_{n,n}}x_n = b_n \end{array} \right.$$

où pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_{i,i} \neq 0$ . Ce cas ne peut se produire que si  $p = n$ .

On obtient alors  $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$ , puis en injectant dans l'avant dernière équation et en divisant par  $a_{n-1,n-1}$  qui est non nul, on trouve  $x_{n-1}$ . En remontant ainsi de suite, on obtient une unique solution  $(x_1, \dots, x_n)$ .

- un système trapézoïdal de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \boxed{a_{1,1}}x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1,p}x_p = b_1 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & \boxed{a_{r,r}}x_r & + \dots & + a_{r,p}x_p = b_r \\ & & & & & & 0 = b_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 = b_n \end{array} \right.$$

où le rang du système vérifie nécessairement  $r \leq \min(n, p)$ .

1. S'il existe un indice  $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$  tel que  $b_i \neq 0$ , alors le système est incompatible et n'admet aucune solution.
2. Si pour tout  $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$ ,  $b_i = 0$  alors le système est compatible (il l'est également si  $r = n$  car dans ce cas, on n'a pas de membres de gauches nuls) et se résout en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires (qui sont des variables libres).
  - (a) Si  $r = p$ , on est ramené au cas précédent et on obtient une unique solution.
  - (b) Si  $r < p$ , on exprime  $x_r$  en fonction des  $x_i$  pour  $i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$ , puis on injecte dans l'équation précédente. On exprime ensuite  $x_{r-1}$  en fonction des inconnues secondaires que sont  $(x_{r+1}, \dots, x_p)$  et ainsi de suite.  
A la fin, les inconnues principales  $(x_1, \dots, x_r)$  s'expriment en fonction des inconnues secondaires  $(x_{r+1}, \dots, x_p)$  qui sont libres : il y a donc une infinité de solutions.

On peut résumer la situation dans le théorème suivant :

**Théorème 1: Nombre de solutions d'un système linéaire**

Un système linéaire admet zéro, une seule ou une infinité de solutions.

**Exemple 6.** • Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner le système :

$$(S) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} x & & & = 1 \\ -y - z & = 1 \\ 0 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - z \end{cases}$$

où  $z \in \mathbb{R}$  est une variable libre. On obtient donc une infinité de solutions que sont

$$\{(1, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

• Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1. \end{cases}$$

En l'échelonnant de la même manière, on obtient

$$(S) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} x & & & = 1 \\ -y - z & = 1 \\ 0 & = 2 \end{cases}$$

qui est un système incompatible. Donc le système  $(S)$  n'admet aucune solution.

### 13.3.3 Intersection de droites et de plans

• Plaçons-nous dans le plan orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Toute droite  $(D)$  dans ce plan admet une équation de la forme  $ax + by = c$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les points  $(x, y)$  qui appartiennent à cette droite vérifient cette équation. Si on considère une deuxième droite  $(D')$  d'équation  $a'x + b'y = c'$ , alors les points d'intersection des deux droites sont solutions du système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Si les droites  $(D)$  et  $(D')$  sont parallèles non confondues, le système n'admet aucune solution.

Si les droites  $(D)$  et  $(D')$  ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un unique point et le système admet une unique solution.

Si les droites  $(D)$  et  $(D')$  sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide d'une variable libre.

**Exemple 7.** Les deux derniers exemples de l'exemple 1 représentent les points d'intersection de deux droites parallèles non confondues et de deux droites non parallèles respectivement.

Enfin, le système suivant représente les points d'intersection de deux droites confondues :

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases} \iff x + y = -2 \iff y = -2 - x$$

donc le système admet une infinité de solutions que sont les points  $\{(x, -2 - x), x \in \mathbb{R}\}$ , c'est à dire les points situés sur la droite d'équation  $y = -2 - x$ .

• Plaçons-nous dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tout plan  $(P)$  dans l'espace admet une équation de la forme  $ax + by + cz = d$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  et les points  $(x, y, z)$  qui appartiennent à ce plan vérifient cette équation. Si on considère deux autres plans  $(P')$  et  $(P'')$  d'équations respectives  $a'x + b'y + c'z = d'$  et  $a''x + b''y + c''z = d''$ , alors les points d'intersection des trois plans sont solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

On a plusieurs cas :

1. Si  $(P)$  et  $(P')$  sont parallèles non confondus, alors l'intersection de  $(P)$  et  $(P')$  est vide donc le système n'a aucune solution.
2. Si  $(P)$  et  $(P')$ , ne sont pas parallèles, ils s'intersectent selon une droite  $(D)$ . Il reste à étudier l'intersection de  $(D)$  et  $(P'')$  :
  - (a) Si  $(D)$  et  $(P'')$  sont parallèles et  $(D)$  n'est pas incluse dans  $(P'')$ , leur intersection est vide donc le système n'admet aucune solution.
  - (b) Si  $(D)$  est incluse dans  $(P'')$ , alors leur intersection est égale à  $(D)$ . Il y a donc une infinité de solutions au système, qui s'expriment en fonction d'une variable libre.
  - (c) Si  $(D)$  et  $(P'')$  ne sont pas parallèles, alors leur intersection est un point et le système admet une unique solution.
3. Si  $(P)$  et  $(P')$  sont confondus, leur intersection est égale à  $(P)$  et il reste à étudier l'intersection de  $(P)$  avec  $(P'')$ .
  - (a) Si  $(P)$  et  $(P'')$  sont parallèles non confondus, alors leur intersection est vide et le système n'admet aucune solution.
  - (b) Si  $(P)$  et  $(P'')$  sont confondus, alors leur intersection est égale à  $(P)$  et le système admet une infinité de solutions qui s'expriment en fonction de deux variables libres.
  - (c) Si  $(P)$  et  $(P'')$  ne sont pas confondus, alors leur intersection est une droite  $(D)$  et le système admet une infinité de solutions qui s'expriment en fonction d'une variable libre.

**Exemple 8.** • Considérons les plans  $(P)$  et  $(P')$  d'équations respectives  $x + y + z = 0$  et  $x + y + z = 1$ . L'intersection de ces deux plans est vide car leurs deux équations forment un système incompatible.

• On a vu dans l'exemple 3 que l'intersection des trois plans d'équations respectives  $2x + y - z = 3$ ,  $-x - 5y + z = -1$  et  $4x - 2y - 3z = 0$  était réduite à un point.

• On a vu dans l'exemple 6 que l'intersection des plans d'équations respectives  $x + y + z = 0$ ,  $2x + y + z = 1$  et  $x + 2y + 2z = -1$  est la droite  $\{(1, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$ .

En fait, l'intersection des deux plans  $x + y + z = 0$  et  $x + 2y + 2z = -1$  est la droite  $\{(1, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$  et on constate que cette dernière est incluse dans le plan d'équation  $2x + y + z = 1$ .

• Considérons les plans  $(P)$ ,  $(P')$  et  $(P'')$  d'équations respectives  $2x + y - 2z = 1$ ,  $-2x - y + 2z = -1$  et  $-4x - 2y + 4z = -2$ . Ces trois plans sont confondus donc leur intersection est  $(P) = \{(x, 1 - 2x + 2z, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$ .