2

Applications

2.1 Applications

2.1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1: Application

Soient E et F deux ensembles non vides.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est la donnée d'une partie $A \subset E \times F$ telle que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in A$.
Autrement dit, tout élément x de E est en relation avec un et un seul élément de F.
L'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in A$ est noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.
E est l'ensemble de départ de l'application f; F est son ensemble d'arrivée.
L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Remarque 1. • Par définition, tout élément de E admet une unique image par f. En revanche, un élément de F peut admettre plusieurs antécédents par f.
• La notation F^E sera justifiée dans le chapitre Dénombrement.

Exemple 1. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une application.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u(n)$. On a ainsi construit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Une suite réelle n'est donc rien d'autre qu'une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dont on note les images un peu différemment.
Ceci justifie qu'on note souvent $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Exemple 2. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

• Tout élément $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet exactement deux antécédents par f : $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.
• 0 admet un unique antécédent par f : lui-même.
• Les éléments de $\mathbb{R}_-^*$ n'admettent pas d'antécédent par f.

Remarque 2. On peut également définir une application en explicitant les images de tous les éléments de l'espace de départ.
Par exemple, on peut définir l'application $f : \{\sqrt{2}, e, \pi\} \longrightarrow \{1515, 1715, 1804\}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(\sqrt{2}) & = & 1515 \\ f(e) & = & 1804 \\ f(\pi) & = & 1804 \end{array} \right.$$

Le fait que tous les éléments de l'espace d'arrivée ne soient pas atteints par f n'est pas un problème.

Définition 2

On dit que deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si pour tout $x \in E, f(x) = g(x)$.

Exemple 3. Les applications $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$ et $\begin{array}{rl} g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sqrt{x})^2 \end{array}$ ne sont pas égales, même si pour tout $x \geq 0, (\sqrt{x})^2 = x$, car elles n'admettent pas le même ensemble de départ.

Définition 3: Application Identité

Soit E un ensemble non vide.
On appelle application identité de E, et on note Id_E, l'application définie par :

$$\forall x \in E, \mathrm{Id}_E(x) = x.$$

Définition 4: Application constante

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est constante s'il existe un élément $a \in F$ tel que pour tout $x \in E, f(x) = a$.

Définition 5: Fonction indicatrice

Soit E un ensemble non vide. Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle fonction indicatrice de A, et on note $\mathbb{1}_A$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque 3. • Les antécédents de 1 par $\mathbb{1}_A$ sont tous les éléments de l'ensemble A; les antécédents de 0 par $\mathbb{1}_A$ sont tous les éléments de l'ensemble $\overline{A}$.

• Soit E un ensemble non vide. L'indicatrice de $E, \mathbb{1}_E : E \to \{0,1\}$ est l'application constante égale à 1 tandis que l'indicatrice de l'ensemble vide, $\mathbb{1}_\emptyset : E \to \{0,1\}$ est l'application constante égale à 0.

• Soient A et B deux parties de E. On a $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

L'implication directe est triviale.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Soit $x \in A$. Alors $1 = \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ donc $x \in B$, ce qui prouve l'inclusion $A \subset B$. Par symétrie, on a l'inclusion réciproque d'où l'égalité $A = B$.

Exemple 4. • L'application $\mathbb{1}_\mathbb{Z} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ est l'application qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{1}_\mathbb{Z}(n) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]n, n+1[, \mathbb{1}_\mathbb{Z}(x) = 0.$$

• L'application $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$$

2.1.2 Restriction et prolongement

Définition 6: Restriction

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle restriction de f à A et on note $f_{|A}$, l'application définie sur A par

$$\begin{array}{rcl} f_{|A} : A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Remarque 4. Il y a unicité de la restriction d'une application à une partie de l'ensemble de départ.

Exemple 5. Soit $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|. \end{array}$ La restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Définition 7: Prolongement

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $A \subset E$ une partie de E et $f : A \longrightarrow F$ une application.
On appelle prolongement de f à E toute application $g : E \to F$ telle que $g_{|A} = f$, i.e.

$$\forall x \in A, g(x) = f(x).$$

Remarque 5. On dit d'une telle application g qu'elle est **un** prolongement de f. Il n'y a pas unicité de ce prolongement.

Exemple 6. L'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ admet une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$. En effet, toute application de la forme

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) & \text{si } x < 0, \end{cases} \end{array}$$

où $h : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application quelconque, est un prolongement de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ à $\mathbb{R}$.

Par exemple, l'application valeur absolue, l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ sont des prolongements possibles.

2.1.3 Image directe d'une partie de l'ensemble de départ

Définition 8: Image directe d'une partie

Soient E et F deux ensembles non vides, et $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle image directe de A par f, et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F.$$

Dans le cas où $A = E$, on dit que $f(E)$ est l'image de f et on la note souvent $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 6. En d'autres termes, $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A. On a l'équivalence $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y$.

Exemple 7. • $f(\emptyset) = \emptyset$.
• Pour tout $x \in E, f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Proposition 1: Propriétés de l'image directe

Soient E et F deux ensembles non vides, et $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. On a les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, puisque $A \subset B, x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$, d'où l'inclusion $f(A) \subset f(B)$.
2. • Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
– Si $x \in A, f(x) \in f(A)$ donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
- Si $x \in B, f(x) \in f(B)$ donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
Dans les deux cas, $f(x) \in f(A) \cup f(B)$, ce qui prouve que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
• Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.
- Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, $A \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$, ce qui prouve que $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
- Si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Or, $B \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$, ce qui prouve que $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$, ce qui prouve que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Finalement, on a bien $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Puisque $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, d'après la première propriété, on a
$$f(A \cap B) \subset f(A) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$
d'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

■

Remarque 7. En général, on n'a pas $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. En effet, soit $f : x \to x^2$, soit $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$. Alors $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$. Or, $f(A) = \mathbb{R}_+$ et $f(B) = \mathbb{R}_+$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

2.1.4 Image réciproque

Définition 9: Image réciproque

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset F$ une partie de F.
on appelle image réciproque de A par f, notée $f^{-1}(A)$, la partie de E suivante :
$$f^{-1}(A) = \{x \in E | f(x) \in A\}.$$
Autrement dit, $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des éléments de E dont les images par f appartiennent à A, ou encore l'ensemble des antécédents des éléments de A.

Remarque 8. Avec les notations précédentes, on a toujours $f^{-1}(F) = E$, $f^{-1}(\mathrm{Im}(f)) = E$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Attention ! Ici, f^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de f (qui n'existe d'ailleurs peut-être pas !).

Exemple 8. • Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$.

• $\exp^{-1}([0,1[) = \exp^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R}_-^*$.

• Si $A \subset E$, alors $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ et $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$.

Proposition 2: Propriétés de l'image réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides. Soient A et B deux parties de F.

1. Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   Soit $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$. Or, $A \subset B$, donc $f(x) \in B$, ce qui signifie que $x \in f^{-1}(B)$.
   On a donc bien montré l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Soit $x \in E$.
   On a
   $$x \in f^{-1}(\overline{A}) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(A)}$$
   donc $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.
3. Soit $x \in E$. On a
   $$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B)$$
   i.e. $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. Soit $x \in E$. On a
   $$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B)$$
   i.e. $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. En utilisant les résultats précédents, on trouve
   $$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A \cap \overline{B}) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}$$
   d'où $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

■

2.1.5 Composition d'applications

Définition 10: Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
On définit l'application composée de f par g, notée $g \circ f$, comme l'application

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

On note alors pour tout $x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque 9. Supposons que $f \circ g$ et $g \circ f$ existent. On dit que f et g commutent si $f \circ g = g \circ f$.
En particulier, pour toute application $f : E \longrightarrow E$,

$$f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Exemple 9. • Considérons les applications $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{c} g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$. D'après la définition, on peut définir $g \circ f$. De plus, comme $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ est inclus dans l'ensemble de départ de f, on peut également définir $f \circ g$ et on a

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} = |x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f \circ g : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (\sqrt{x})^2 = x \end{array}.$$

En particulier, $g \circ f_{|\mathbb{R}_+} = f \circ g$.
• Soit $f : [\![1,3]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!]$ définie par $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ et $g : [\![1,3]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!]$ définie par $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$.
Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont encore des applications de $[\![1,3]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$ vérifiant :

$$f \circ g(1) = 3, f \circ g(2) = 2, f \circ g(3) = 1$$

et

$$g \circ f(1) = 2, g \circ f(2) = 1, g \circ f(3) = 3.$$

En particulier, on remarque que $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 3: Associativité de la composition

Soient E, F, G, H quatre ensembles non vides.
Soit $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to H$ trois applications.
Alors on a l'égalité

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On note cette dernière application $h \circ g \circ f$.

Définition 11

Soit $f : E \longrightarrow E$.
On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_E$.
Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on a

$$f^n \circ f^p = f^p \circ f^n = f^{n+p}.$$

Proposition 4: Image réciproque d'une composée

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Soit $A \subset G$ une partie de G.
Alors $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Démonstration. Raisonnons par équivalences. On a

$$x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow g(f(x)) \in A \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \subset F \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)),$$

ce qui prouve que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset E$.

■

2.2 Injections, surjections, bijections

2.2.1 Applications injectives

Définition 12: Applications injectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Autrement dit, f est injective si tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent par f.

Remarque 10. • Par contraposition, on a la définition équivalente suivante : f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

• En pratique, pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, une méthode possible est de prouver que pour tout $y \in f(E)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$.

Exemple 10. • L'applicaton Id_E est toujours injective pour tout ensemble E.
• Toute application constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.
• Toute application définie sur un singleton est injective.
• L'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective.
En effet, soient $(x, x') \in (\mathbb{R}_+^2)$ tels que $f(x) = f(x')$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow (x - x')(x + x') = 0 \Leftrightarrow x - x' = 0 \text{ ou } x + x' = 0.$$

- Si $x - x' = 0$, alors $x = x'$.
- Si $x + x' = 0$, puisque $x \geq 0$ et $x' \geq 0$, alors $x + x' \geq 0$ donc $x + x' = 0 \Rightarrow x = x' = 0$. (En effet, si l'un des deux nombres x ou x' était non nul, on aurait $x + x' > 0$.)

Dans tous les cas, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$ donc f est injective.

En revanche, l'application $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective puisque $-1 \neq 1$ mais $g(-1) = g(1) = 1$.

• La restriction d'une application injective est injective. En revanche, un prolongement d'une application injective n'est pas nécessairement injective.

Proposition 5

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. Alors toute application $f : E \to F$ strictement monotone est injective.

Démonstration. Montrons-le dans le cas où f est strictement croissante.

Soient $(x, x') \in E^2$ avec $x \neq x'$. Quitte à inverser x et x', on peut supposer sans perte de généralité que $x < x'$.

Puisque f est strictement croissante, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ donc en particulier $f(x) \neq f(x')$.

On a donc bien montré que pour tout $(x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Si f est strictement décroissante, $-f$ est strictement croissante donc $-f$ est injective et on a pour tout $(x, x') \in E^2$,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow -f(x) = -f(x') \Rightarrow x = x'.$$

■

Proposition 6

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Démonstration.

1. Supposons f et g injectives.
   Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, i.e.
   $$g(f(x)) = g(f(x')).$$
   Par injectivité de g, ceci implique que $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, ceci implique que $x = x'$.
   Ainsi, $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$, ce qui assure l'injectivité de $g \circ f$.
2. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons qu'alors f est injective.
   Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. En composant par g, on a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$, i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
   Par injectivité de $g \circ f$, ceci implique que $x = x'$.
   Finalement, on a bien $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, ce qui assure l'injectivité de f.

■

Remarque 11. • Si $g \circ f$ est injective, g n'est pas nécessairement injective.

Soient $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{array}$ et $\begin{array}{rl} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$.

Alors $g \circ f$ est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ qui est injective comme la composée des deux applications injectives $x \longmapsto 2x$ et $x \longmapsto e^x$ mais g ne l'est pas.

• Si seule l'application f est injective, alors $g \circ f$ n'est pas nécessairement injective. En effet, considérons $f : E \longrightarrow E$ une application injective, où $E \subset \mathbb{R}$ et g l'application nulle sur E. Alors $g \circ f$ est l'application nulle sur E et n'est donc pas injective.

2.2.2 Applications surjectives

Définition 13: Applications surjectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent par f, ou encore $f(E) = F$.

Remarque 12. La surjectivité ne dépend que de l'espace d'arrivée. En fait, toute application est surjective sur son image. En effet, soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors l'application $\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & E & \longrightarrow & f(E) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est surjective.

On peut donc toujours rendre une application surjective, quitte à restreindre l'espace d'arrivée.

Exemple 11. • L'application $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est toujours surjective pour tout ensemble E.

• Toute application dont l'espace d'arrivée est un singleton est surjective.

• L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+, f(\sqrt{y}) = y$.

En revanche, l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car les éléments de $\mathbb{R}_-^*$ n'admettent aucun antécédent par f.

• Un prolongement d'une application surjective est surjective. En revanche, la restriction d'une application surjective n'est pas nécessairement surjective.

Proposition 7

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration.

1. Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
   Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Ainsi, $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$.
   On a donc bien montré que pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$, ce qui assure la surjectivité de $g \circ f$.
2. Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
   Posons $y = f(x) \in F$. On a donc $z = g(y)$.
   On a donc bien montré que pour tout $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, ce qui assure la surjectivité de g.

■

Remarque 13. • Si $g \circ f$ est surjective, f n'est pas nécessairement surjective.

Considérons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}$ l'application nulle.

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}$ est l'application nulle et est donc surjective, mais f n'est pas surjective (puisque $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$).

• Si seule l'application g est surjective, alors $g \circ f$ n'est pas nécessairement surjective.

En effet, considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application nulle et $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$. Alors $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ est l'application nulle (car $\sin(0) = 0$) et n'est donc pas surjective.

2.2.3 Applications bijectives

Définition 14: Applications bijectives

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est bijective (ou est une bijection) si f est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, f est bijective si tout élément de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent par f, i.e.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 14. En pratique, pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, une méthode possible est de prouver que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$.

Exemple 12. • Pour tout ensemble E non vide, l'application $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est toujours bijective.

• L'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

• L'application $\begin{array}{rcl} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ est bijective.

• L'application $\begin{array}{rcl} f : [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ est bijective.

• L'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ est bijective.

• Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective. Alors $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ est bijective.

En particulier, si E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, alors toute application $f : E \to f(E)$ strictement monotone est bijective.

• Soit $f : [\![1,3]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!]$ définie par $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$. Alors f est une bijection.

Définition 15: Application réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.
Pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Notons $f^{-1}(y)$ cet élément x.
Ceci permet de définir une nouvelle application

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

qui vérifie $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$.
On dit que f^{-1} est l'application réciproque de f.

Remarque 15. Pour toute partie $A \subset F$, l'image directe de A par f^{-1} correspond à l'image réciproque de A par f et les deux se notent $f^{-1}(A)$.

Exemple 13. • Pour tout ensemble E non vide, la réciproque de l'application $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est elle-même.

• La réciproque de l'application $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est $\begin{array}{rcl} f^{-1}:\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

• La réciproque de l'application $\begin{array}{rcl} f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ est $\begin{array}{rcl} f^{-1}:[-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$.

• La réciproque de l'application $\begin{array}{rcl} f:[0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ est $\begin{array}{rcl} f^{-1}:[-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$.

• La réciproque de l'application $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ est $\begin{array}{rcl} f^{-1}:]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$.

• La réciproque de l'application $f : [\![1,3]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!]$ définie par $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2$ est $f^{-1} : [\![1,3]\!]$ définie par $f^{-1}(1)=1, f^{-1}(2)=3$ et $f^{-1}(3)=2$.

On remarque que dans ce cas, $f = f^{-1}$, ce qui équivaut à $f^2 = \mathrm{Id}_{[\![1,3]\!]}$ comme nous allons le voir juste après.

Proposition 8

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ son application réciproque. Alors

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$ de telle sorte que $x = f^{-1}(y)$.
Alors
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$
Ainsi, pour tout $x \in E, f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{Id}_E(x)$, ce qui implique que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
De même, soit $y \in F$. On pose $x = f^{-1}(y)$ de telle sorte que $y = f(x)$. Alors

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Ainsi, pour tout $y \in F, f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{Id}_F(y)$, ce qui implique que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. ■

Remarque 16. Dans le cas où $E = F$ et $f = f^{-1}$, on a donc $f \circ f = f^2 = \mathrm{Id}_E$.

Corollaire 1

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ son application réciproque.
Alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ est surjective, donc f^{-1} est surjective.
De même, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ est injective donc f^{-1} est injective.
Ainsi, f^{-1} est à la fois surjective et injective, donc est bijective.
Soit $(f^{-1})^{-1} : E \longrightarrow F$ l'application réciproque de f^{-1}.
Soit $x \in E$. Considérons l'unique élément $y \in F$ tel que $f^{-1}(y) = x$. On a alors

$$y = (f^{-1})^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

donc finalement $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$ et ce pour tout $x \in E$, ce qui prouve que

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

■

On a la réciproque de la proposition précédente :

Proposition 9: Caractérisation de l'application réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides, soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration. Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ est injective, alors f est injective et puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ est surjective, alors f est surjective, donc f est bijective.

Soit $y \in F$. Alors $f^{-1}(y) \in E$ donc

$$g \circ f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow g(y) = f^{-1}(y),$$

et ce pour tout $y \in F$ donc $g = f^{-1}$. ■

Remarque 17. • Ce résultat est utile en pratique. Si on arrive à construire une application g vérifiant ces propriétés, alors on peut affirmer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

• Ce résultat montre que f^{-1} est l'unique application définie sur F à valeurs dans E vérifiant ces propriétés.

• On a la réciproque à une remarque précédente : si $f : E \longrightarrow E$ est une application telle que $f^2 = f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

Proposition 10: Réciproque d'une composée d'applications bijectives

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des bijections.
Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Remarquons que $f^{-1} \circ g^{-1} : G \longrightarrow E$. Il s'agit d'une simple vérification :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G.$$

En vertu de la proposition précédente, ceci assure que $g \circ f$ est bijective et que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

■

Remarque 18. Pour prouver la bijectivité de $g \circ f$, on pouvait également utiliser le fait que la composée de deux applications injectives est injective et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

Définition 16

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application bijective.
On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n} = (f^{-1})^n$.
Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$f^n \circ f^p = f^p \circ f^n = f^{n+p}.$$

Enfin, mentionnons une dernière propriété importante. On rappelle que le graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$, est l'ensemble

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Proposition 11: Symétrie des graphes d'applications bijectives

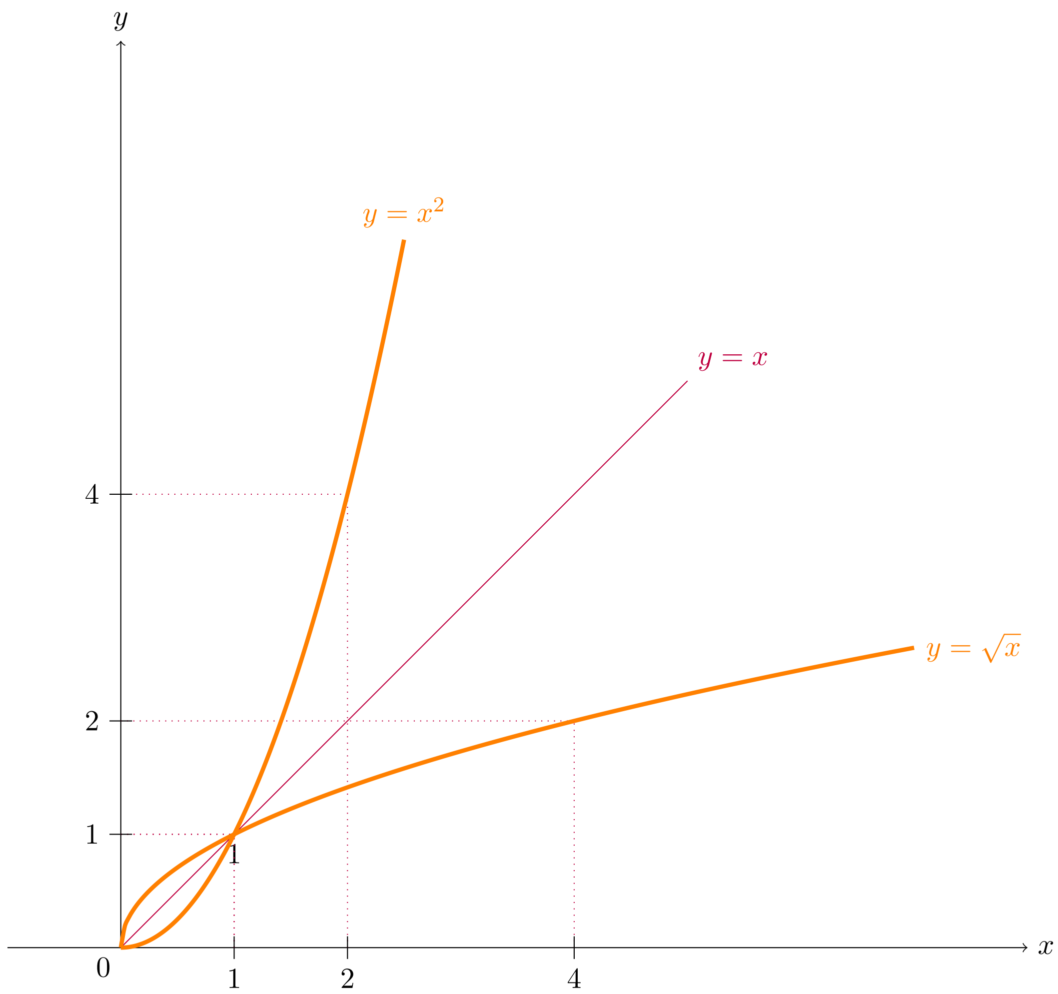
Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \longrightarrow E$.
Alors les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

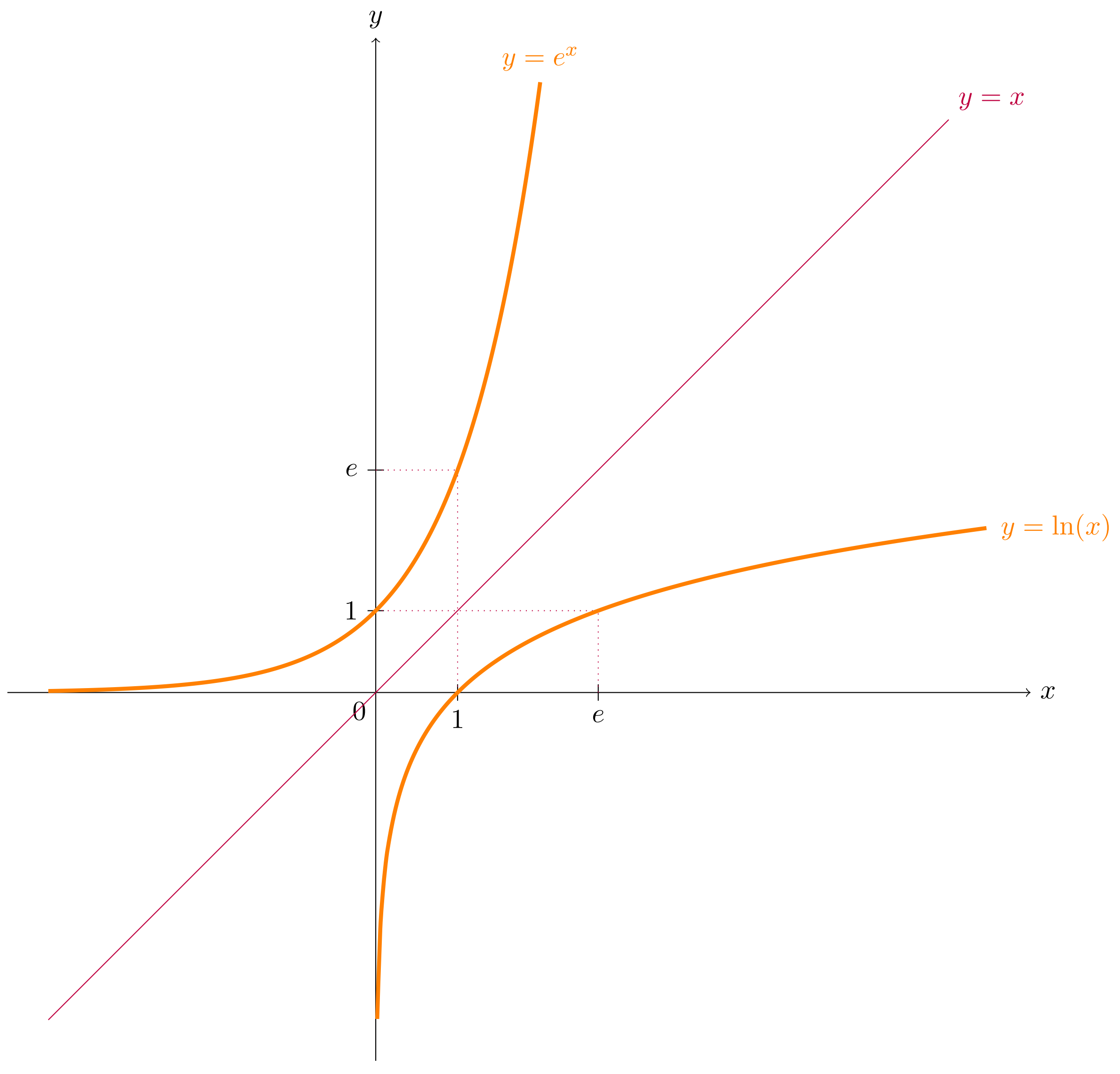
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.$$

Or, la transformation qui envoie le point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ sur (y, x) est la symétrie d'axe $y = x$, d'où le résultat. ■

Exemple 14. • Les graphes des applications $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



• Les graphes des applications $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} f^{-1} : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



y
$y = e^x$
$y = x$
e
$y = \ln(x)$
1
x
0
1
e