Corrigé du devoir maison n°7

Problème 1 : Irrationalité de e

1. On a $r_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0$ d'où $\boxed{r_0 = e - 1.}$

   En effectuant une intégration par parties, on trouve
$$r_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e - 1$$
   d'où $\boxed{r_1 = e - 2.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant une intégration par parties, on trouve
$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx \\ &= \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{(n+1)!} e^x dx \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \\ &= r_n - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, r_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}.}$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}, e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$.

   • Pour $n = 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + r_0 = 1 + e - 1 = e$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$. Montrons la propriété au rang $n+1$.

   D'après la question précédente, $r_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + r_{n+1},$$
   ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1], 0 \leqslant (1-x)^n \leqslant 1$ et $1 \leqslant e^x \leqslant e$ donc pour tout $x \in [0,1] 0 \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!} e^x \leqslant \dfrac{e}{n!}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 = \int_0^1 0 dx \leqslant \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!} dx = \frac{e}{n!},$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant r_n \leqslant \frac{e}{n!}.}$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n!} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0.}$

(b) D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e = u_n + r_n$ d'où $u_n = e - r_n$.
Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e - r_n = e$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e.}$

(c) Montrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$

D'après le théorème des suites adjacentes, elles sont donc convergentes de même limite. Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant e \leqslant v_n$.

S'il existait un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u_{n_0} = e$, alors pour tout $n > n_0, u_n > e$ puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, ce qui est absurde.

On a donc nécessairement pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n < e$. De même, puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante, le même argument montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > e$.

Finalement, on a bien $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n < e < v_n.}$

5. (a) D'après la question précédente, puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on a $u_q < e < v_q = u_q + \dfrac{1}{qq!}$ donc en multipliant par $q!$, on obtient

$$\boxed{q! u_q < q! e < q! u_q + \frac{1}{q}.}$$

(b) Par définition, $u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ donc $q!u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$. Pour tout $k \in [\![0,q]\!], k!$ divise $q!$ puisque $k \leqslant q$ donc $\frac{q!}{k!}$ est un entier naturel pour tout $k \in [\![0,q]\!]$. Ainsi $q!u_q$ est un entier naturel comme somme d'entiers naturels.
De même, $q!e = q!\frac{p}{q} = p(q-1)! \in \mathbb{N}$. Donc $q!e - q!u_q \in \mathbb{Z}$.
Or, d'après la question précédente, $0 < q!e - q!u_q < \frac{1}{q}$. De plus $\frac{1}{q} \leqslant 1$ car $q \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, $0 < q!e - q!u_q < 1$. Le nombre $q!e - q!u_q$ est donc un entier strictement compris entre 0 et 1, ce qui est impossible.
L'hypothèse $e = \frac{p}{q}$ a donc mené à une contradiction.
Finalement, on a donc bien prouvé que $\boxed{e \text{ est un nombre irrationnel.}}$

Problème : Autour du nombre d'or

Partie I : Deux suites convergeant vers le nombre d'or

1. (a) Si $n = 1$, il y a un seul 1 sous la racine donc $\boxed{u_1 = \sqrt{1} = 1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$, où le nombre 1 apparaît n fois. Ainsi $\sqrt{1 + u_n} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$, où le nombre 1 apparaît $(n+1)$ fois donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.}$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [1, \varphi]$.
• Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \in [1, \varphi]$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \in [1, \varphi]$. Montrons que $u_{n+1} \in [1, \varphi]$.
D'après la question précédente, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
Par hypothèse de récurrence, on a $2 \leqslant 1 + u_n \leqslant 1 + \varphi$.
Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1 + u_n} \leqslant \sqrt{1 + \varphi},$$
i.e. $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{1 + \varphi}$.
Or, d'après la partie précédente, on sait que $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc $\sqrt{\varphi + 1} = \sqrt{\varphi^2} = |\varphi| = \varphi$ car $\varphi > 0$ d'où $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [1, \varphi].}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{1 + u_n} - u_n)(\sqrt{1 + u_n} + u_n)}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} = \frac{1 + u_n - u_n^2}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} = \frac{(\varphi - u_n)(u_n - \varphi')}{\sqrt{1 + u_n} + u_n}.$$
On sait d'aprés la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [1, \varphi]$ donc $\varphi - u_n \geqslant 0, u_n - \varphi' \geqslant u_n > 0$ (car $\varphi' < 0$) et $\sqrt{1 + u_n} + u_n \geqslant \sqrt{2} + 1 > 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

(d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, on obtient par passage à la limite que $l = \sqrt{1 + l}$ d'où $l^2 = 1 + l$.

Ainsi, $l = \varphi$ ou $l = \varphi'$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $l \geqslant 0$. Puisque $\varphi' < 0, l = \varphi'$ est impossible donc $l = \varphi$.
Ainsi, on a bien $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \varphi.}$

2. (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > \varphi'$ donc $v_n - \varphi' > 0$ ce qui assure la bonne définition de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \varphi}{v_{n+1} - \varphi'} = \frac{\frac{1}{v_n} + 1 - \varphi}{\frac{1}{v_n} + 1 - \varphi'} = \frac{(1-\varphi)v_n + 1}{(1-\varphi')v_n + 1} = \frac{\varphi' v_n - \varphi\varphi'}{\varphi v_n - \varphi\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{v_n - \varphi}{v_n - \varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi} w_n$$

donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$ et de premier terme

$$w_1 = \frac{v_1 - \varphi}{v_1 - \varphi'} = \frac{1-\varphi}{1-\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{\varphi'}{\varphi} \times \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n$.
Or, $\left|\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = 0$.
On en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 0.}$

(b) Par définition de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{v_n - \varphi}{v_n - \varphi'} \Leftrightarrow w_n(v_n - \varphi') = v_n - \varphi \Leftrightarrow v_n(1 - w_n) = \varphi - \varphi' w_n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n \neq 1$ car $\varphi \neq \varphi'$ donc $1 - w_n \neq 0$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{\varphi - \varphi' w_n}{1 - w_n}.$$

D'après la question précédente, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \varphi - \varphi' w_n = \varphi$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 - w_n = 1$.
Par quotient de limites, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \varphi.}$

Partie II : Suite de Fibonacci

1. (a) L'équation caractéristique associée est $(E) : r^2 - r - 1 = 0$.
D'après les résultats préliminaires, on sait que (E) admet deux racines réelles distinctes que sont φ et φ'.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \lambda\varphi^n + \mu\varphi'^n$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\varphi + \mu\varphi' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 1 = \lambda(\varphi - \varphi') = \lambda\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n\right)$.

Or, on a déjà vu en question 2.(b) de la partie I que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = 1.$$

Ainsi, $1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n \sim 1$ donc par produit, on en déduit que $\boxed{F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.}$

Puisque $\varphi > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = +\infty$, ce qui implique par équivalence que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty.}$

2. (a) D'après la question précédente, $F_{n+1} \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$ et $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ donc par quotient, on en déduit que

$$\boxed{q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi}$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \varphi.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$q_{n+1} - q_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2}{F_nF_{n+1}}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

• Pour $n = 0$, on a $F_0F_1 + F_0^2 - F_1^2 = -1^2 = -1 = (-1)^{0+1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
Montrons que $F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$.
On a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_n)^2 \\
&= F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+1}^2 - 2F_nF_{n+1} - F_n^2 \\
&= -F_nF_{n+1} - F_n^2 + F_{n+1}^2 \\
&= -(-1)^{n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

donc $F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, q_{n+1} - q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}.}$$

(c) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} q_{2(n+1)} - q_{2n} &= q_{2n+2} - q_{2n+1} + q_{2n+1} - q_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{F_{2n}F_{2n+1}} \\ &= \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}} - \frac{1}{F_{2n}F_{2n+1}}. \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}} - \dfrac{1}{F_{2n}F_{2n+1}} = \dfrac{F_{2n} - F_{2n+2}}{F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}} = -\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}} = -\dfrac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} < 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*, F_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_{2(n+1)} - q_{2n} < 0$ donc la suite $(q_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• De même, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q_{2(n+1)+1} - q_{2n+1} = q_{2n+3} - q_{2n+2} + q_{2n+2} - q_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{F_{2n+2}F_{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}} \\ &= -\frac{1}{F_{2n+2}F_{2n+3}} + \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}. \end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{1}{F_{2n+2}F_{2n+3}} + \dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}} = \dfrac{-F_{2n+1} + F_{2n+3}}{F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}} = \dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}} = \dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} > 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*, F_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, q_{2(n+1)+1} - q_{2n+1} > 0$ donc la suite $(q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Enfin, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \varphi$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} q_{2n+1} = \varphi$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} q_{2n+1} - q_{2n} = \varphi - \varphi = 0.$$

On en conclut que $\boxed{\text{les suites } (q_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la question 2.(b),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} q_{k+1} - q_k = q_{n+1} - q_1.$$

Or, $q_1 = \dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}} = q_{n+1} - 1$.

Or, on sait d'après la question 2.(a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \varphi$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n+1} = \varphi$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}} = \varphi - 1.}$

(e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = v_n$.

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $q_1 = v_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $q_n = v_n$ et montrons que $q_{n+1} = v_{n+1}$.

Par défintion de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$q_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{q_n}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $q_n = v_n$ donc $F_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n} = v_{n+1}$ par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, q_n = v_n.}$

3. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n \leqslant \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1 \Leftrightarrow \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_n \leqslant \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|-\frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

Puisque $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]0,1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \leqslant 1$ d'où

$$\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, \left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

car $\sqrt{5} > 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} < F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, ce qui implique que $-\frac{1}{2} < F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{2}$ d'où $F_n \leqslant \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 1.(a), on a

$$\varphi F_n + \varphi'^n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) + \varphi'^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + (\sqrt{5} - \varphi)\varphi'^n).$$

Or, $\sqrt{5} - \varphi = \sqrt{5} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\varphi'$ donc $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + (\sqrt{5} - \varphi)\varphi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = \varphi F_n + \varphi'^n.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\varphi F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi\varphi'^{n+1} + \varphi^n - \varphi'^n).$$

Or, on sait que $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$ donc

$$\begin{aligned}
\varphi F_{n+1} + F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2\varphi^n + (-1)^{n+2}\frac{\varphi}{\varphi^{n+1}} + \varphi^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{\varphi^n}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi+1)\varphi^n + \varphi^n + (-1)^n(\frac{1}{\varphi^n} - \frac{1}{\varphi^n})) \\
&= \frac{\varphi^n(\varphi+2)}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Or, $\frac{\varphi+2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ donc $\frac{\varphi^n(\varphi+2)}{\sqrt{5}} = \varphi^{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, \varphi F_{n+1} + F_n = \varphi^{n+1}.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• On a

$$\varphi F_{2n-1} - F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{2n} - \varphi\varphi'^{2n-1} - \varphi^{2n} + \varphi'^{2n}) = \frac{\varphi'^{2n-1}(\varphi' - \varphi)}{\sqrt{5}}.$$

Or, $\varphi' - \varphi = -\sqrt{5}$ donc $\varphi F_{2n-1} - F_{2n} = -\varphi'^{2n-1}$.
Puisque $\varphi' \in]-1, 0, [$, alors $\varphi'^{2n-1} \in]-1, 0[$ donc $-\varphi'^{2n-1} \in]0, 1[$ d'où

$$0 < \varphi F_{2n-1} - F_{2n} < 1 \Leftrightarrow F_{2n} < \varphi F_{2n-1} < F_{2n} + 1.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n} \in \mathbb{N}$, ceci implique que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = \lfloor \varphi F_{2n-1} \rfloor.}$

• On a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \varphi F_{2n} - F_{2n+1} = -\varphi'^{2n}$.
Puisque $\varphi' \in]-1, 0, [$, alors $\varphi'^{2n} \in]0, 1[$ donc $-\varphi'^{2n-1} \in]-1, 0[$ d'où

$$-1 < \varphi F_{2n} - F_{2n+1} < 0 \Leftrightarrow F_{2n+1} - 1 < \varphi F_{2n} < F_{2n+1}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n+1} \in \mathbb{N}$, ceci implique que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, F_{2n+1} - 1 = \lfloor \varphi F_{2n} \rfloor.}$

(d) Soit $n \geqslant 2$. D'après la question 4.(a), on a

$$\varphi F_n - \varphi' - F_{n+1} = -\varphi' - \varphi'^n = -\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}).$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $n-1 \geqslant 1$ donc $\varphi'^{n-1} \in]-1, 1[$ d'où $1+\varphi'^{n-1} \in]0, 2[$ et finalement $-\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}) > 0$ (car $-\varphi' > 0$).
D'autre part, puisque $\varphi' \in]-1, 0[$, la suite $(|\varphi'|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0 donc pour tout $n \geqslant 2, \varphi'^n \leqslant |\varphi'|^n < |\varphi'| = -\varphi'$ et $\varphi' < -\varphi'$ donc pour tout $n \geqslant 1, \varphi'^n < -\varphi'$ d'où pour tout $n \geqslant 2, 1 + \varphi'^{n-1} < 1 - \varphi'$, ce qui implique que $-\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}) < -\varphi' + \varphi'^2 = 1$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2, 0 < \varphi F_n - \varphi' - F_{n+1} < 1$, i.e. $F_{n+1} < \varphi F_n - \varphi' < F_{n+1} + 1$.
On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, F_{n+1} = \lfloor \varphi F_n - \varphi' \rfloor.}$

(e) Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, on a

$$x_{n+1} = F_{n+1} + 1 = \lfloor \varphi F_n - \varphi' \rfloor + 1 = \lfloor \varphi F_n - \varphi' + 1 \rfloor = \lfloor \varphi F_n + \varphi \rfloor = \lfloor \varphi(F_n + 1) \rfloor$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, x_{n+1} = \lfloor \varphi x_n \rfloor.}$