Corrigé de la liste d'exercices n°11 — Suites numériques

Exercice 1

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 2

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{3} < \lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor \leqslant 1 - \frac{n}{3}$ donc $-\frac{1}{3} < \frac{\lfloor 1-\frac{n}{3} \rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, on déduit du théorème des gendarmes que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 1-\frac{n}{3} \rfloor}{n} = -\frac{1}{3}.$$
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, -2 + (-1)^n \leqslant -1$ donc $(-2+(-1)^n)n \leqslant -n$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2+(-1)^n)n = -\infty$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = -2n^2 + n(1+\sin(n)) = n^2\left(-2 + \frac{1+\sin(n)}{n}\right).$$
La suite $(1+\sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\sin(n)}{n} = 0$.
On en déduit par somme de limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \frac{1+\sin(n)}{n} = -2$ donc par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \frac{1+\sin(n)}{n}\right) = -\infty.$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (3n-1)^7 - (2n-1)^6 = n^7\left(3 - \frac{1}{n}\right)^7 - n^6\left(2-\frac{1}{n}\right)^6 = n^7\left[\left(3-\frac{1}{n}\right)^7 - \frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^6\right].$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3-\frac{1}{n}\right)^7 - \frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^6 = 3^7$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{n^5(1+\frac{1}{n^2})}{n^5(\frac{\sin(n)}{n^3}-1)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^3}-1}.$$
Puisque $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} - 1 = -1.$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

7. En multipliant par n^3 le numérateur et le dénominateur, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{n-2n^2}{n+(-1)^n} = \frac{n^2(\frac{1}{n}-2)}{n(1+\frac{(-1)^n}{n})} = n\frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}}.$$
Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1.$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = -2$ donc par quotient
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = -\infty.$$

Exercice 3

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n(n+1)} - n &= \frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)(\sqrt{n(n+1)}+n)}{\sqrt{n(n+1)}+n} \\ &= \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. \end{aligned}$$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{3^n((\frac{2}{3})^n-1)}{3^n((\frac{2}{3})^n+1)} = \frac{(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{2}{3})^n+1}.$$
Puisque $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \left(\frac{3^n((\frac{2}{3})^n + 1)}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3\left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right)}.$$

   Puisque $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2}\right)} = 1$.

   Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_n = \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n-1} k + n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n-1)n+n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2}{n^2+n} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x) = 0$ donc par composition de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 4

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1-n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. Puisque $\frac{3}{4} \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

   Par ailleurs, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n) = 0$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n(1+\frac{\sin(n)}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{\sin(n)}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})}.$$

   Puisque $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{\sin(n)}{n} = 1$.

   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$. Finalement, par quotient, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n)}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})} = 0.$$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n}.$$
Par croissance comparée, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$.
On a déjà vu par ailleurs que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = n\left(1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right).$$
On a vu que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 1$ donc par produit, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\left((-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right) = +\infty.$$
6. Puisque pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|u_n| = \left|\frac{1}{2}\sin(n!)\right|^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 5

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient
$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{n^2+3-(n^2+1)}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{2}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}.$$
Or, $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.
2. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ donc par composition de limites, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
Par produit, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n\cos\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$.
3. Puisque $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.
4. Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = e$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $n + k \leqslant 2n$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$ donc par comparaison, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!], n + 1 \leqslant n + k \leqslant 2n$ donc
$$\frac{1}{4n^2} \leqslant \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$
En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2}$$
d'où
$$\frac{1}{4n} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{(n+1)^2}.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{(n+1)^2} = \dfrac{n}{n^2+2n+1} = \dfrac{1}{n+2+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n^2x - 1 < \lfloor n^2x \rfloor \leqslant n^2x$ donc $nx - \frac{1}{n} < \dfrac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} \leqslant nx$.
   - Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.
   - Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nx - \dfrac{1}{n} = +\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} = +\infty$.
   - Si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nx = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} = -\infty$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!], kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$ donc $\dfrac{kx-1}{n^2} < \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leqslant \dfrac{kx}{n^2}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, on trouve
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2}$$
d'où
$$\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} < v_n \leqslant \frac{n(n+1)x}{2n^2}.$$
Or, $\dfrac{n(n+1)x}{2n^2} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})x}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{2}$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)x}{2n^2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{x}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{x}{2}$.

Exercice 8

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant k^n|u_0|$.
• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $k^0|u_0| = |u_0| \geqslant |u_0|$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n| \leqslant k^n|u_0|$. Montrons que $|u_{n+1}| \leqslant k^{n+1}|u_0|$.
Par propriété de la suite, on a $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence (et puisque $k > 0$), on en déduit que

$$|u_{n+1}| \leqslant k \times k^n|u_0| = k^{n+1}|u_0|,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n| \leqslant k^n|u_0|$.
Or, puisque $k \in]0, 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0| = 0$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 9

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n \leqslant 1$ donc en multipliant par u_n (qui est positif), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_nv_n \leqslant u_n \leqslant 1$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 1$, par hypothèse, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
En échangeant u_n et v_n (qui jouent des rôles symétriques), on trouve de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 10

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$.
   Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $\dfrac{u_n}{2} > 0$ et $\dfrac{1}{u_n}$ d'où $\dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} > 0$, ce qui assure que $u_{n+1} > 0$ et achève la récurrence.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

   car pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Ceci prouve que pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{2}$. Or, on a également $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$ donc on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

   Or, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geqslant 2$ d'où $2 - u_n^2 \leqslant 0$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, 2u_n > 0$, on en déduit que $\dfrac{2 - u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente de limite $l \geqslant \sqrt{2}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$, et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+2}{2u_n}$, on obtient
$$l = \frac{l^2+2}{2l}$$
d'où $l^2 = 2$, i.e. $l = \pm\sqrt{2}$. Puisque $l \geqslant \sqrt{2}$, on en déduit que $l = \sqrt{2}$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice 11

1. On a $u_7 - u_3 = 4r$ donc $4r = 3$ d'où $r = \dfrac{3}{4}$.
Or, on a également $u_3 = u_0 + 3r = u_0 + \dfrac{9}{4}$ donc $u_0 = 6 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{4}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = \dfrac{15+3n}{4}$.
2. On a $\dfrac{v_{14}}{v_3} = q^{11}$ donc $q^{11} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$ d'où $q = \left(\dfrac{8}{3}\right)^{\frac{1}{11}}$.
Or, on a également $v_3 = v_0 \times q^3$ donc $v_0 = \dfrac{v_3}{q^3} = 6 \times \left(\dfrac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 6 \times \left(\dfrac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}} \times \left(\dfrac{8}{3}\right)^{\frac{n}{11}} = 6 \times \left(\dfrac{8}{3}\right)^{\frac{n-3}{11}}$.
3. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k = 101 \times \frac{u_0 + u_{100}}{2} = 101 \times \frac{1+1+100r}{2} = 101(1+50r)$.
Ainsi, $2 = 101 + 50 \times 101r$, d'où $-99 = 5050r$, i.e. $r = -\dfrac{99}{5050}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = 1 - \dfrac{99n}{5050}$.

Exercice 12

1. On a $x = -\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc $c = -1$.
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.
•**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > -1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > -1$. Montrons que $u_{n+1} > -1$.
On a
$$u_{n+1} + 1 = -\frac{1}{u_n+2} + 1 = \frac{u_n+1}{u_n+2}.$$
Puisque $u_n > -1$, on a $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 2 > 1 > 0$ donc $\dfrac{u_n+1}{u_n+2} > 0$, ce qui montre que $u_{n+1} + 1 > 0$, i.e. $u_{n+1} > -1$.
On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > -1$, ce qui montre d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$ et assure la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+1} = 1 + v_n$$
donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n = \dfrac{1}{u_0+1} + n = \dfrac{1}{2} + n = \dfrac{2n+1}{2}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1 = \dfrac{2}{2n+1} - 1 = \dfrac{1-2n}{2n+1}$.
5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ donc par quotient, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Exercice 13

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 2l - 1$, i.e. $l = 1$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l = u_n - 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$
donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 - 1)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = 2^n(u_0 - 1) + 1$.
Puisque $2 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.
- Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 > 1$, on a $u_0 - 1 > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = +\infty$.
- Si $u_0 < 1$, on a $u_0 - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = -\infty$.

Exercice 14

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 3l + 1$, i.e. $l = -\frac{1}{2}$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l = u_n + \frac{1}{2}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$
donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n v_0 = 3^n(u_0 + \frac{1}{2}) = 3^n \times \frac{11}{2}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - \frac{1}{2} = 3^n \times \frac{11}{2} - \frac{1}{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{11}{2}\sum_{k=0}^{n} 3^k - \frac{n+1}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} - \frac{n+1}{2} = \frac{11(3^{n+1}-1) - 2n - 2}{4}$$
d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{11 \times 3^{n+1} - 2n - 13}{4}$.

Exercice 15

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.
L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$ donc l'équation admet $r = 1$ comme racine double.
Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n = \lambda + \mu n.$$

Pour $n = 0$, on obtient $u_0 = \lambda$ et pour $n = 1, u_1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = u_1 - \lambda = u_1 - u_0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$.
On remarque que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $u_1 - u_0$.
On pouvait le remarquer dès le début car pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 16

1. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$.
   Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$
   Pour $n = 0$, on trouve $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = -1$.
   Pour $n = 1$, on trouve $u_1 = 2(-1 + \mu)$ d'où $-2 + 2\mu = 2$, i.e. $\mu = 2$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(2n - 1)$.
2. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-4) = 0$ donc les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.
   Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu 4^n$.
   Pour $n = 0$, on trouve $4 = \lambda + \mu$.
   Pour $n = 1$, on trouve $5 = -\lambda + 4\mu$ d'où $\mu = \dfrac{9}{5}$ et $\lambda = \dfrac{11}{5}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{11}{5} \times (-1)^n + \dfrac{9}{5} \times 4^n$.
3. On considère l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Les racines sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
   Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(\frac{2n\pi}{3}) + \mu \sin(\frac{2n\pi}{3})$.
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = 1$.
   Pour $n = 1$, on a $u_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mu \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \mu\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\mu\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, d'où $\mu = 2$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(\frac{2n\pi}{3}) + 2\sin(\frac{2n\pi}{3})$.

Exercice 17

1. On montre facilement par récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   En effet, la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Alors $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} > 0$.
   On peut donc poser pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) = \dfrac{1}{2}\ln(u_{n+1}) + \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$ donc $v_{n+2} - \dfrac{1}{2}v_{n+1} - \dfrac{1}{2}v_n = 0$.
   On considère l'équation caractéristique $r^2 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{2} = 0$.

Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$. Il existe alors un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda + \mu(-\frac{1}{2})^n = \ln(u_n)$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\lambda+\mu(-\frac{1}{2})^n}$.
Pour $n = 0$, on trouve $e^{\lambda+\mu} = e^3$ donc $\lambda + \mu = 3$.
Pour $n = 1$, on trouve $e^{\lambda-\frac{\mu}{2}} = 1$ donc $\lambda - \frac{\mu}{2} = 0$.
Ainsi, $\mu = 2$ et $\lambda = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2(-\frac{1}{2})^n+1}$.

2. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ donc on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(v_n)$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(\sqrt{v_n}) = \dfrac{1}{2}\ln(v_n) = \dfrac{1}{2}u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{u_0}{2^n} = \dfrac{\ln(v_0)}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = e^{u_n} = e^{2^{1-n}}$.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + \dfrac{4}{3}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2u_{n+2}-3u_{n+1}-2u_n = 2\left(w_{n+2}+\frac{4}{3}\right)-3\left(w_{n+1}+\frac{4}{3}\right)-2\left(w_n+\frac{4}{3}\right) = 2w_{n+2}-3w_{n+1}-2w_n-4 = 0.$$

On a l'équation caractéristique $2r^2 - 3r - 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = u_n - \frac{4}{3} = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n - \frac{4}{3}.$$

Pour $n = 0$, on trouve $11 = \lambda + \mu - \dfrac{4}{3}$ d'où $\lambda + \mu = \dfrac{37}{3} \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = \dfrac{74}{3}$.
Pour $n = 1$, on trouve $25 = 2\lambda - \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{4}{3}$ d'où $\dfrac{79}{3} = 2\lambda - \dfrac{\mu}{2}$.
En soustrayant les deux équations, on obtient $\dfrac{5\mu}{2} = -\dfrac{5}{3}$ d'où $\mu = -\dfrac{2}{3}$.
Puisque $\lambda = \dfrac{37}{3} - \mu$, on obtient $\lambda = 13$.
Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 13 \times 2^n + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{4}{3}$.

4. La suite n'est bien définie que si pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
En effet, on a $x_2^2 = x_1^3 x_0^2 = e^{75}e^{22}$ donc $x_2 = \pm\sqrt{e^{99}}$.
Or, si $x_2 = -\sqrt{e^{99}}$, on a $x_3^2 = x_2^3 x_1^2 = -\sqrt{e^{99}}^3 e^{50} < 0$, ce qui est impossible car $x_3 \in \mathbb{R}$.
On peut donc supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(x_n)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \ln(x_{n+2}) = \frac{1}{2}\ln(x_{n+2}^2) = \frac{1}{2}\ln(x_{n+1}^3 x_n^2) = \frac{3}{2}\ln(x_{n+1}) + \ln(x_n) = \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \frac{3}{2}r - 1 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e^{u_n} = e^{\lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n}.$$

Pour $n = 0$, on trouve $e^{11} = e^{\lambda+\mu}$ d'où $\lambda + \mu = 11 \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = 22$.
Pour $n = 1$, on trouve $e^{25} = e^{2\lambda - \frac{\mu}{2}}$ d'où $2\lambda - \frac{\mu}{2} = 25$.
En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{5\mu}{2} = -3$ d'où $\mu = -\frac{6}{5}$.
Puisque $\lambda = 11 - \mu$, on obtient $\lambda = \frac{61}{5}$.
Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = e^{\frac{61}{5} \times 2^n - \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n}$.

Exercice 18

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leqslant 5 = v_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \leqslant v_n$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.
   On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \geqslant 0$ d'après la question précédente donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) \leqslant 0$ d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   • Enfin, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = \frac{v_0 - u_0}{3^n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
   On a donc bien montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. D'après le théorème sur les suites adjacentes, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite l.
   En particulier, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 2l$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$ donc la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $u_0 + v_0 = 6$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 6 = 2l$ d'où $l = 3$.
   Finalement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Exercice 19

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2(n+1)} - L_{2n} = L_{2n+2} - L_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$$

donc la suite $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2(n+1)+1} - L_{2n+1} = L_{2n+3} - L_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$$

donc la suite $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2n+1} - L_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, ceci implique que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite l.
On en conclut que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l. (On peut en fait montrer que $l = -\ln(2)$.)

Exercice 20

Par hypothèse, il existe $(l, l', l'') \in \mathbb{C}^3$ tels que $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} & = & l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} & = & l' \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} & = & l'' \end{cases}$.

Puisque la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut affirmer que la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n} = l$.
De même, puisque la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n} = l''$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $l = l''$.
Par le même argument, en remarquant que la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $l' = l''$.
Finalement, on a $l = l'$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l = l' = l''$.

Exercice 21

• Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (et vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
• Réciproquement, supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée. Il suffit donc de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas majorée. Puisque c'est une suite croissante, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Mais alors, on aurait nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement majorée, et puisque c'est une suite croissante, on déduit du théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Autre preuve (qui n'utilise pas l'absurde) : Notons que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également croissante. En effet, puisque $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n+1)}$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, $l = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$. En particulier, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \leqslant l$. Par ailleurs, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \leqslant \varphi(n)$. La croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique alors que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant l$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisqu'elle est croissante, on déduit du théorème de la limite monotone qu'elle converge et on a nécessairement $\lim_{n\to} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Exercice 22

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   •Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
   On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geqslant 0$$
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.
3. • Pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}).$$
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $\sqrt{u_n} > 0$. D'autre part, on sait que pour tout $n \geqslant 1, 0 < u_n \leqslant v_n$ donc par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1, \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{v_n}$, i.e. $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.
   Il en découle que pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   • Pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$
   d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
4. • On a pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.
   Puisque la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, alors pour tout $n \geqslant 1, v_n \leqslant v_1$ donc pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par v_1. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   • De même, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante donc pour tout $n \geqslant 1, u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par u_1. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.
   • En passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on trouve $l' = \dfrac{l + l'}{2}$ d'où $l = l'$.
   Finalement, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$.
5. On a déjà vu que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Enfin, d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = l - l = 0$.

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc bien adjacentes.
Remarque : on pouvait montrer dès la question 3 que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes car pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ en utilisant le résultat de l'exercice 8.

Exercice 23

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   • **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
   Alors $\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} > 0$ donc $\dfrac{2}{u_{n+1}} > 0$, ce qui implique que $u_{n+1} > 0$.
   De même, $\dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $v_{n+1} > 0$.
   Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n + v_n}{u_n v_n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

   Or, $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$ et d'après la question précédente, $u_n + v_n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$.
   Puisque $u_0 = 1 \leqslant 2 = v_0$, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}.$$

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0, u_n + v_n > 0$ et $v_n - u_n \geqslant 0$ d'après la question précédente donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui implique que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
   De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

   d'après la question précédente, donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$
4. Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$ et d'après la question 2), $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   De même, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$ et d'après la question 2), $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$.
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on trouve

$$l' = \frac{l + l'}{2} \Leftrightarrow 2l' = l + l' \Leftrightarrow l = l'.$$

On en déduit que $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes et de même limite.}}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n.$$

On en déduit que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0 = 2$.
Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
On a alors par unicité de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = l^2 = 2$ d'où $l = \sqrt{2}$ ou $l = -\sqrt{2}$.
Or, on a prouvé en question 1) que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\sqrt{2} < 0$, il existerait un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n < 0$, ce qui est absurde.
Nécessairement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}.}$

Exercice 24

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.
• On sait que la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à chercher parmi les points fixes de f.
Or, on a $f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{2l+3}{l+2} = l \Leftrightarrow 2l + 3 = l^2 + 2l \Leftrightarrow l^2 = 3 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{3}$.
• On a pour tout $x \neq -2, f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ (on s'intéresse à cet intervalle-là car $u_0 = 1$).
Ainsi, f est croissante sur $[1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) = [\frac{5}{3}, +\infty[\subset [1, +\infty[$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$.
On a $u_1 = f(u_0) = \dfrac{5}{3} \geqslant 1 = u_0$ et puisque f est croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, \sqrt{3}]$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leqslant \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [1, \sqrt{3}]$. Montrons que $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$.
Puisque $1 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$, par croissance de f sur $[1, \sqrt{3}]$, on en déduit que

$$1 \leqslant f(1) = \frac{5}{3} \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

donc $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, \sqrt{3}]$.
• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in [1, \sqrt{3}]$.
Puisque les limites éventuelles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 25

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{2x + 35}.$$

• La fonction f est croissante sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$.
Cherchons les points fixes de f.
On a $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2l+35} = l \Rightarrow 2l + 35 = l^2 \Rightarrow l^2 - 2l - 35 = 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont 7 et -5. Parmi ces deux racines, seule 7 est réellement un point fixe de f.
• Etudions le signe de $f(x) - x$.
- Si $x \in [-\frac{35}{2}, 0[$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $-x \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$.
- Si $x \geqslant 0$, on a (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) les équivalences

$$f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+35} \leqslant x \Leftrightarrow 2x + 35 \leqslant x^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 7.$$

Finalement, $f(x) - x \geqslant 0$ pour $x \in [-\frac{35}{2}, 7]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ pour $x \in [7, +\infty[$.
• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2u_n + 35 \geqslant 0 \Leftrightarrow u_n \geqslant -\dfrac{35}{2}$.
Pour cela, il suffit que $u_0 \geqslant -\dfrac{35}{2}$ car f est à valeurs positives donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n \geqslant 0 > -\frac{35}{2}.$$

• Si $u_0 \geqslant 7$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$ et puisque f est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, on déduit du théorème de la limite monotone que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f.
• Si $-\frac{35}{2} \leqslant u_0 \leqslant 7$, alors $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$ et puisque f est est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 \leqslant 7$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 7$. Par croissance de f, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(7) = 7$ donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 7.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f.

Exercice 26

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $]-\infty, 12]$ par

$$f(x) = \sqrt{12 - x}.$$

• La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 12]$. De plus, on a $f(0) = \sqrt{12} < 12$ et $f(12) = 0$ donc $f([0, 12]) = [0, \sqrt{12}] \subset [0, 12]$.
Cherchons les points fixes de f. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{12 - x} = x \Rightarrow 12 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0.$$

Les racines de ce trinôme sont 3 et -4, mais seul 3 est un point fixe de f.
• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\infty, 12]$. Or, f est à valeurs positives donc pour tout $n \geqslant 1$, on aura $u_n \in [0, 12]$.
Il faut donc que $u_0 \in [-132, 12]$ car $f([-132, 12]) = [0, 12]$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - 3 = \sqrt{12 - u_n} - 3 = \frac{(\sqrt{12 - u_n} - 3)(\sqrt{12 - u_n} + 3)}{\sqrt{12 - u_n} + 3} = \frac{12 - u_n - 9}{\sqrt{12 - u_n} + 3} = \frac{3 - u_n}{3}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 3| \leqslant \dfrac{|u_n - 3|}{3}$ et on montre alors aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leqslant \dfrac{|u_0 - 3|}{3^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 3 = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 27

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = x + \frac{1+x}{1+2x}.$$

• On a pour tout $l \neq -\dfrac{1}{2}, f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{1+l}{1+2l} = 0 \Leftrightarrow l = -1$ donc -1 est le seul point fixe de f.
• On a pour tout $x \neq -\frac{1}{2}, f(x) - x = \dfrac{1+x}{1+2x}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1, -\frac{1}{2}[$.
• Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{1+2x-2(1+x)}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2-1}{(1+2x)^2} = \frac{4x+4x^2}{(1+2x)^2} = \frac{4x(x+1)}{(1+2x)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :
• Si $u_0 \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$: on remarque que $f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = [1+\infty[\subset]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie, à valeurs dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et puisque pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, f(x) \geqslant x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0 > -\frac{1}{2}$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle convergerait vers une limite l telle que $l \geqslant u_0 > -\frac{1}{2}$. Or, la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est -1. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et puisqu'elle est croissante, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Si $u_0 \in]-\infty, -1]$: on remarque que $f(]-\infty, -1]) =]-\infty, -1]$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est à valeurs dans $]-\infty, -1]$, donc elle est majorée par -1.
Puisque pour tout $x \in]-\infty, -1], f(x) \geqslant x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ (qui est le seul point fixe de f).
• Si $u_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[$, on a $u_1 = f(u_0) \in]-\infty, -1[$ et on est donc ramenés au cas précédent.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} -1 & \text{si}\, u_0 < -\frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si}\, u_0 > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Exercice 28

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
• Déterminons les points fixes de f. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{a}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Puisque $a > 0, -\sqrt{a} < 0 < \sqrt{a}$ donc f admet deux points fixes distincts.

• On a pour tout $x \neq 0, f(x) - x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} - x\right) = \dfrac{a - x^2}{2x}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup]0, \sqrt{a}]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup [\sqrt{a}, +\infty[$.

• On a pour tout $x \neq 0, f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$ donc $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup]0, \sqrt{a}]$.

On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{a}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :

• Si $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$, puisque $f([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{a}$.

D'autre part, pour tout $x \in [\sqrt{a}, +\infty[, f(x) \leqslant x$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $-\sqrt{a}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

• Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}]$, on a $u_1 = f(u_0) \in [\sqrt{a}, +\infty[$ et on est ramenés au cas précédent.

• Si $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{a}]$, puisque $f(]-\infty, -\sqrt{a}]) =]-\infty, -\sqrt{a}]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $-\sqrt{a}$.

D'autre part, pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{a}], f(x) \geqslant x$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $\sqrt{a}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\sqrt{a}$.

• Si $u_0 \in [-\sqrt{a}, 0[$, alors $u_1 = f(u_0) \in]-\infty, -\sqrt{a}]$ et on est ramenés au cas précédent.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{si } u_0 > 0 \\ -\sqrt{a} & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$

Exercice 29

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$, ce qui prouve que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Puisque f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f([1,3]) = [f(3), f(1)] = [\frac{5}{3}, 3] \subset [1,3]$ donc l'intervalle $[1,3]$ est bien stable par f.
2. Puisque $[1,3]$ est stable par f et que $u_0 \in [1,3]$ on montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3]$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, ce qui garantit la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*, f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
   On a $u_2 = f \circ f(u_0) = f \circ f(1) = f(3) = \frac{5}{3} > u_0$ et on en déduit par une récurrence immédiate que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. De même, $u_3 = f \circ f(u_1) = f(u_2) = f(\frac{5}{3}) = \frac{11}{5} < u_1 = 3$ et on en déduit par une récurrence immédiate que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Puisque la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge vers un point fixe de $f \circ f$ dans $[1, 3]$.

   Or, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f \circ f(x) = 1 + \dfrac{2}{1+\frac{2}{x}} = 1 + \dfrac{2}{\frac{x+2}{x}} = 1 + \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{3x+2}{x+2}$ donc

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

   Le seul point fixe de $f \circ f$ dans $[1, 3]$ est 2 donc on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2$.

5. De même, puisque la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3, elle converge vers un point fixe de $f \circ f$ dans $[1, 3]$.

   Ainsi, on a nécessairement

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2$$

   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.