Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Devoir maison n°8
A rendre pour le Lundi 5 Janvier 2026

Problème 1 : Lemme de Césaro, critères de Cauchy et de d'Alembert

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Le but de cette question est de montrer le critère de d'Alembert, qui affirme que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   On suppose donc qu'il existe $l \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
   (a) Soit $q \in]l, 1[$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{q^{n+1}}{q^n}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$.
   (Indication : on pourra commencer par vérifier que la suite $(\frac{u_n}{q^n})_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.)
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel l.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$.
   Le but de cette question est de montrer le lemme de Césaro, qui affirme que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$.
   Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que
   $$\forall n \geqslant n_0, |S_n - l| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\varepsilon.$$
   (b) En déduire qu'il existe un entier N tel que
   $$\forall n \geqslant N, |S_n - l| \leqslant 2\varepsilon.$$
   (c) En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Le but de cette question est de montrer le critère de Cauchy, qui affirme que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} < 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On suppose donc qu'il existe $l \in [0,1[$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$.

   (a) Soit $q \in]l,1[$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
   (c) Conclure.

5. Dans cette question, on montre que si le critère de d'Alembert s'applique, alors le critère de Cauchy s'applique également.
   Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ où $l \in]0,1[$.

   (a) Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l)$.
   (b) En appliquant le lemme de Césaro à une suite bien choisie, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(l)$.
   (c) En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$.

Problème 2 : Une suite définie par récurrence

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = e^{ax}.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{array}\right.$$

Partie I

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée h' de h.
   (c) Etablir le tableau de variation de h.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ en discutant selon les valeurs de a.

Partie II

On suppose dans cette partie que $a \geqslant 0$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par e. Qu'en conclure ?
5. On suppose que $a > \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Partie III

On suppose dans cette partie que $a < 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.
3. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$.
   (b) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
   (c) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites appartenant à $[0,1]$.
4. Démontrer que pour tout $x \in]0,1[$:

$$(f\circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0.$$

Dans toute la suite, on suppose $-e < a < 0$.

5. On note g la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right).$$

   (a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.
   (b) En déduire les variations de la fonction g.
   (c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que l'équation $(f\circ f)(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle fermé $[0,1]$.
7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.