

## Liste d'exercices n°14

## Matrices

**Exercice 1.** Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Préciser si les expressions suivantes ont un sens et, si oui, les calculer.

- |             |               |                           |
|-------------|---------------|---------------------------|
| 1. $AB$     | 4. $BC + 4A$  | 7. $(AB + 3I_2)(BC + 4A)$ |
| 2. $BA$     | 5. $(B + 2)C$ | 8. $(A - 4I_2)(2A - I_2)$ |
| 3. $AD - C$ | 6. $B + 2C$   | 9. $2A^2 - 9A + 4I_2$     |

**Exercice 2.**

1. Trouver toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = I_2$ .
2. Trouver toutes les matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $B^2 = B$ .

**Exercice 3.** Trouver toutes les matrices qui commutent avec  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Vérifier que  $A^T A$  est une matrice symétrique.
2. Montrer que

$$A^T A = 0 \iff A = 0.$$

**Exercice 5.** Déterminer le rang des matrices suivantes.

- |                                                                                                          |                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$                                              | 4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$                   |
| 2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$                                  | 5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 13 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ |                                                                                                         |

**Exercice 6.** Soit  $A$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer tous les réels  $\lambda$  tels qu'il existe un vecteur  $X \in \mathbb{R}^3$  non nul vérifiant

$$AX = \lambda X.$$

2. Trouver tous les vecteurs  $X \in \mathbb{R}^3$  tels que :

- (a)  $AX = 0$ .
- (b)  $AX = 2X$ .
- (c)  $AX = 4X$ .

**Exercice 7.** Soient  $a, b$  et  $c$  trois complexes. Calculer les puissances de chacune des matrices suivantes.

1.  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

2.  $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

**Exercice 8.** Calculer les puissances de chacune des matrices suivantes.

1.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

3.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.  $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 9.**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1. Calculer  $J^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 10.** Soit  $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ .

- 1. Calculer  $C^2 - 4C$ .
- 2. En déduire que  $C$  est inversible et calculer son inverse.
- 3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe deux réels  $a_n$  et  $b_n$  tels que

$$C^n = a_n C + b_n I_3.$$

**Exercice 11.** On considère les suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = y_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n. \end{cases}$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

- 1. Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

- 2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
- 3. Calculer  $A^2$ . En déduire  $A^{2n}$  et  $A^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4. En déduire les expressions de  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12.** On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $aA + bB = C$ .
2. Evaluer, pour tout entier naturel  $n$ , les matrices  $A^n$  et  $B^n$ .
3. En déduire la valeur de  $C^n$ , pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 13.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1.  $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -4 & 8 & -14 \\ -3 & 7 & -12 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
4.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
5.  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

**Exercice 14.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $(A - 2I_3)(A - 3I_3)$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 15.** Soit  $a$  un réel. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que la matrice  $M$  soit inversible.

**Exercice 16.** Soient  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Montrer que  $P$  est inversible et calculer la matrice  $D$  définie par  $D = P^{-1}AP$ .  
(b) Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
2. On définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1, v_0 = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(3u_n - v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(-u_n + 3v_n). \end{cases}$$

On pose également pour tout entier naturel  $n, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n, U_n = A^n U_0$ .
- (b) En déduire les expressions de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 17.** Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres complexes. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $P$  est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer  $P^{-1}AP$ .
3. En déduire que si  $a + b + c = 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $p$ , on a :

$$(I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n - A^p.$$

2. Supposons que  $A^n = 0$ .

Montrer que la matrice  $I_n - A$  est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 19.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  définies par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)} \quad \text{et} \quad b_{i,j} = \omega^{-(i-1)(j-1)}.$$

1. Calculer  $A^2, B^2, AB$  et  $BA$ .
2. Déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 20.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ .

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer si la matrice  $A$  est inversible et si oui, calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice 21.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Montrer que  $A + B$  est nilpotente.