Corrigé de la liste d'exercices n°12 — Limites et continuité

Exercice 1.

1. • On a $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\cos(x)-14)\sin(e^{-x}) = -13\sin(1) < 0$.
   Par ailleurs, on sait que $(\ln(x)+\sqrt{x})\ln(1+x) \underset{0}{\sim} (\ln(x)+\sqrt{x})x = x\ln(x)+x\sqrt{x} \underset{x\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0^-$ car au voisinage de 0^+, $(\ln(x)+\sqrt{x})\ln(1+x)$ est de signe négatif.
   Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
   • Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit que $\sin(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.
   Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2e^{-x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)}$ donc par croissances comparées, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.
2. • On a $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ donc $x^3+\sin(x^2) = x^2\left(x+\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}\right) \underset{0}{\sim} x^2$ et $e^{x^3}-1 \underset{0}{\sim} x^3$

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^4\sqrt{14}}{x^3(x+x^2\ln(x))} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{14}x^4}{x^4} = \sqrt{14}$$

   donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \sqrt{14}$.
   • En $+\infty$, on a

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^6\sqrt{x}}{e^{x^3}x^2\ln(x)} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0^+$$

   par croissances comparées.

Exercice 2.

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x}} &= \frac{x^2+3x-1-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x}} \\
&= \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+x}} \\
&= \frac{2x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{2x}
\end{aligned}$$

   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+x} = 1$.
2. Au voisinage de 0, on a

$$(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \exp\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\ln(\cos(x))\right).$$

   Or, $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1))$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)-1 = 0$ donc

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Par ailleurs, $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$ donc $\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

3. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\sin(x\ln(x)) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$ d'où
$$\frac{\sin(x\ln(x))}{x} \underset{0}{\sim} \ln(x).$$
Or, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\ln(x))}{x} = -\infty$.

4. On a $\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9} = \dfrac{(x-3)(-x-2)}{(x-3)^2} = \dfrac{-x-2}{x-3}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 3} -x-2 = -5$, $\lim\limits_{x\to 3^-} x-3 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9} = -\infty$.

5. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ et $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on en déduit que
$$\cos(\sin(x)) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{\sin^2(x)}{2} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$
Par ailleurs, $\tan^3(x) - 2\sin^2(x) = \sin^2(x)\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2\right) \underset{0}{\sim} x^2\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2\right)$ donc
$$\frac{\cos(\sin(x))-1}{\tan^3(x)-2\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2\right)} = -\frac{1}{2\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2\right)} \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

6. Puisque $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\lfloor x \rfloor \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Or, pour tout $x > 0$, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$. On en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

7. Montrons que cette limite n'existe pas. Supposons par l'absurde qu'il existe $l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x) = l$.

Soit $u_n = n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on en déduit par composition que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi\sin(n\pi) = l$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, n\pi\sin(n\pi) = 0$, donc $l = 0$.

Soit $v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on en déduit par composition que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n\pi + \dfrac{\pi}{2})\sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = l = 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, (2n\pi + \frac{\pi}{2})\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $l = 0 = +\infty$, ce qui est absurde.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

8. On a pour tout $x > 0$,
$$\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = e^{2x\ln(1+\frac{2}{x})}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, on en déduit que $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ donc $2x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 4$, i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 4$, puis par composition de limites, $\lim\limits_{\to+\infty} e^{2x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^4$.

Exercice 3. Supposons que f soit croissante (la preuve est analogue dans le cas où f est décroissante).
Soit $x_0 \in I$.
La fonction f est croissante sur $]a, x_0[$ et par croissance de f, pour tout $x \in]a, x_0[$, $f(x) \leqslant f(x_0)$, donc f est majorée sur $]a, x_0[$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en x_0^- et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,x_0[} f(x)$.
De même, f est croissante sur $]x_0, b[$ et par croissance de f, pour tout $x \in]x_0, b[$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, donc f est minorée su $]x_0, b[$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en x_0^+ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x\in]x_0,b[} f(x)$.

Exercice 4.

1. On sait que $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\pi x = 0$ donc par composition, on obtient
$$1-\cos(2\pi x) \underset{0}{\sim} \frac{(2\pi x)^2}{2} = 2\pi^2 x^2$$
donc $\dfrac{1-\cos(2\pi x)}{x^2\ln(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2\pi^2}{\ln(x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^-$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
2. Posons $x = 1+h$. Quand x tend vers 1, on a $h = x-1$ tend vers 0 et
$$f(x) = f(1+h) = \frac{1-\cos(2\pi(1+h))}{(1+h)^2\ln(1+h)} = \frac{1-\cos(2\pi h+2\pi)}{(1+h)^2\ln(1+h)} = \frac{1-\cos(2\pi h)}{(1+h)^2\ln(1+h)}.$$
On a déjà vu en question précédente que $1-\cos(2\pi h) \underset{0}{\sim} 2\pi^2h^2$ et par ailleurs, on sait que $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$ donc
$$f(1+h) \underset{0}{\sim} \frac{2\pi^2 h}{(1+h)^2}$$
donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{h\to0} f(1+h) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{2\pi^2h}{(1+h)^2} = 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.
3. Puisque $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on a par composition $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ donc
$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{x^2(\sqrt{x+4}+2)}{x} = x(\sqrt{x+4}+2) \underset{x\to0}{\longrightarrow} = 0.$$
Ainsi, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Exercice 5.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ comme produit et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, le dénominateur ne s'y annulant pas.
Calculons $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. On sait que $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$ (car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$) donc $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{x+2}{x} \underset{1}{\sim} 3$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3 = f(1)$, ce qui montre que f est continue en 1.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
   Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\lim\limits_{x \to n} \sin(\pi x) = \sin(n\pi) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = (n-1) \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = n \times 0 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to n} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = 0 = g(n)$ donc g est continue en n, et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction h est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ comme produit de fonctions continues sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$.
   Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$h(x) = \frac{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2}{x^2 \cos(x)} = \frac{(\cos(x) - 2)(\cos(x) - 1)}{x^2 \cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

   donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{2} = h(0)$ donc h est continue en 0.

Exercice 6. On a pour tout $x \in I$,

$$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \text{ et } \min(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Puisque la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et g sont continues sur I, on en déduit que les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I comme composée de fonctions continues sur I.

Exercice 7. Posons pour tout $x \in [a, b], g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a, b]$.
Par ailleurs, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \geqslant a$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \leqslant b$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c) - c = 0$, i.e. $f(c) = c$ donc c est un point fixe de f.

Exercice 8. Soit $T > 0$ tel que g est T-périodique.
On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = a + nT$. Puisque $T > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(a+nT) = l$.
Or, puisque g est T-périodique, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, g(a + nT) = g(a)$ donc $g(a) = l$ (ce qui implique qu'on a nécessairement $l \in \mathbb{R}$).
Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}, g(a) = l$ donc g est constante.

Exercice 9. On suppose qu'il existe deux réels l et l' tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l'$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition, il existe $A > 0$ et $A' < 0$ tels que pour tout $x \geqslant A, |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $x \leqslant A', |f(x) - l'| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $x \geqslant A, |f(x)| = |f(x) - l + l| \leqslant |f(x) - l| + |l| \leqslant \varepsilon + |l|$ et pour tout $x \leqslant A', |f(x)| \leqslant \varepsilon + |l'|$.
Par ailleurs, puisque f est continue sur $[A', A]$, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que f est bornée sur $[A', A]$, donc il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [A', A], |f(x)| \leqslant M$.
Finalement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \max(\varepsilon + |l'|, M, \varepsilon + |l|)$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Par définition, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > M, f(x) > f(0)$.
De même, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M' < 0$ tel que pour tout $x < M', f(x) > f(0)$.
La fonction f étant continue sur le segment $[M', M]$, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet un minimum sur $[M', M]$, atteint en un réel qu'on note α. Ainsi, pour tout $x \in [M', M], f(x) \geqslant f(\alpha)$.
De plus, puisque $0 \in [M', M], f(\alpha) \leqslant f(0)$.
Il en découle que pour tout $x > M, f(x) > f(0) \geqslant f(\alpha)$ et pour tout $x < M', f(x) > f(0) \geqslant f(\alpha)$.
Finalement, pour tout réel $x, f(x) \geqslant f(\alpha)$ donc la fonction f admet bien un minimum global atteint en α.

Exercice 11.

1. Posons $f : x \mapsto x^{17} + x^3 \sin(x)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs, on a $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi^{17}$, donc $1 \in [f(0), f(\pi)]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $f(x_0) = 1$.
2. Posons $g : x \mapsto x^2 \cos(x) + x \sin(x)$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs, on a $g(0) = 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$, donc $-1 \in [g(\frac{3\pi}{2}), g(0)]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_0 \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ tel que $g(x_0) = -1$.

Exercice 12. Raisonnons par analyse-synthèse.
•**Analyse :** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x, f(x)^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.
Supposons que f prenne ces deux valeurs, c'est à dire supposons qu'il existe deux réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$ tels que $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c entre x et y tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que f ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeur.
Ainsi, f prend au maximum une valeur donc f est la fonction constante égale à 0 ou la fonction constante égale à 1.
• **Synthèse** : Si f est la fonction constante égale à 0 (ou égale à 1), on a clairement pour tout $x \in \mathbb{R}, f^2(x) - f(x) = 0$.
Les deux fonctions solutions de ce problème sont donc les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

Exercice 13.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable (donc continue) sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on a pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}], f_n'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 \geqslant 1 > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.
   Par ailleurs, $f_n(0) = -1 < 0$ (car $0^n = 0$ puisque $n > 0$) et $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} > 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f_n est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, il existe un unique réel $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$.
   Or, $f_n(x_n) = 0$ donc $2x_n^2 + x_n - 1 = -x_n^n$ d'où
   $$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) \leqslant 0$$

car $x_n \in [0,1]$.

3. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \leqslant 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, ceci implique que $x_n \leqslant x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $l \in [0, \frac{1}{2}]$.
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$, i.e. $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$. Passons à la limite dans cette égalité.
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ et par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, \dfrac{1}{2}]$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x_n^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.
   En passant à la limite, on obtient alors $2l^2 + l - 1 = 0$, i.e. $l = \dfrac{1}{2}$ ou $l = -1$ (impossible car $l \in [0, \frac{1}{2}]$).
   On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 14.

1. La fonction f est définie en les réels x pour lesquels $x^2 + 1 \geqslant 0$, ce qui est vérifié par tout réel x donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$
   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > 0$ d'une part et d'autre part, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$ donc $x - \sqrt{x^2+1} < 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la bijection, f est alors bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$ qui est à déterminer.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = +\infty$.
   En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour tout réel x,
   $$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0^+$.
   Puisque f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, on a donc
   $$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]0, +\infty[.$$

Exercice 15.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Montrons que $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$. Par hypothèse sur f, on a

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

   Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}, f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$ donc $f(x) = f(0)$.
3. On a montré en question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ donc f est constante.

   Réciproquement, si f est une fonction constante, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.

   Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,continues en 0 telles que pour tout réel $x, f(x) = f(2x)$ sont donc les fonctions constantes.

Exercice 16.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

   ▷**Initialisation** : Par hypothèse, on a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

   ▷**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $f(nx) = nf(x)$.

   On a alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$.

   On a $0 = f(0) = f(nx + (-nx)) = f(nx) + f(-nx)$. Puisque $-n > 0$, on sait d'après la récurrence précédente que $f(-nx) = -nf(x)$ d'où $f(nx) = -f(-nx) = nf(x)$, ce qui prouve que pour tout $n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.

   • Montrons que pour tout $r \in \mathbb{Q}, f(rx) = rf(x)$.

   Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

   D'après les propriétés précédntes, on a $qf(rx) = f(qrx) = f(px) = pf(x)$ d'où

   $$f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

   En remplaçant r par x, et x par 1, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{Q}, f(x) = f(1)x$.

   • Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$.

   On sait déjà que la propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Q}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(1)x_n$.

   D'une part, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(1)x_n = f(1)x$.

   Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$.

   Par unicité de la limite, on en conclut que $f(x) = f(1)x$, et ce pour tout réel x.

2. On a montré en question précédente (sans aucune hypothèse supplémentaire sur f) que pour tout $x \in \mathbb{Q}, f(x) = f(1)x$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on sait qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ convergeant vers x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant x \leqslant v_n$ (il suffit de poser pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$).

   Par croissance de f, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leqslant f(x) \leqslant f(v_n)$.

   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in \mathbb{Q}$, on sait que $f(u_n) = f(1)u_n$ et $f(v_n) = f(1)v_n$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, f(1)u_n \leqslant f(x) \leqslant f(1)v_n$.

   En passant à la limite dans ces inégalités, on obtient $f(1)x \leqslant f(x) \leqslant f(1)x$ d'où $f(x) = f(1)x$, et ce pour tout réel x.