Corrigé du devoir maison n°8

Problème 1 : Lemme de Césaro, critères de Cauchy et de d'Alembert

1. • Si $q=1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   • Si $q\neq 1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Or, on sait que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q|<1$, et dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } |q|<1 \text{ et dans ce cas, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}.}$

2. (a) Soit $\varepsilon = q-l>0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0, |\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $n\geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l \leqslant \varepsilon = q-l$.

   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n\geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}.}$

   (b) D'après la question précédente, pour tout $n\geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{q^{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{q^n}$ donc la suite $(\frac{u_n}{q^n})_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.

   Il en découle que pour tout $n\geqslant n_0, \dfrac{u_n}{q^n} \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n\geqslant n_0, u_n \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n.}$

   (c) Pour tout $n\in\mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   D'autre part, d'après la question précédente, on a pour tout $n\geqslant n_0$,

   $$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

   Puisque $|q|<1$, d'après la question $1.a)$, on en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. A fortiori, elle est majorée.

   Il existe donc un réel M positif tel que pour tout $n\in\mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k \leqslant M$.

   Ainsi, pour tout $n\geqslant n_0, v_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M$.

Or, pour tout $n \leqslant n_0 - 1$, puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$v_n \leqslant v_{n_0-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M.$$

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M.$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée.}}$

(d) D'après le théorème de la limite monotone, on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Il en découle que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|S_n - l| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n} - l\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k - nl}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - l)}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - l)}{n}\right|$$

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|S_n - l| \leqslant \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l)\right|}{n} + \frac{\left|\sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - l)\right|}{n} \leqslant \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l)\right|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - l|}{n}.$$

Or, on sait que pour tout $k \geqslant n_0, |u_k - l| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|S_n - l| \leqslant \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l)\right|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon}{n} = \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l)\right|}{n} + \frac{(n - 1 - n_0 + 1)\varepsilon}{n}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi}, \forall n \geqslant n_0, |S_n - l| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\varepsilon.}$$

(b) Puisque $n_0 \in \mathbb{N}^*, n - n_0 \leqslant n$ donc $\dfrac{n - n_0}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs, puisque le terme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|$ est constant, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} = 0$

donc il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} \leqslant \varepsilon$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$.

On a alors pour tout $n \geqslant N, |S_n - l| \leqslant \varepsilon + \varepsilon$ d'où

$$\boxed{\forall n \geqslant N, |S_n - l| \leqslant 2\varepsilon.}$$

(c) On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = l.}$

4. (a) Soit $\varepsilon = q - l > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n^{\frac{1}{n}} - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant n_0, u_n^{\frac{1}{n}} - l \leqslant \varepsilon = q - l$ d'où

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant n_0, u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q.}$$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant n_0, u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q$, ce qui implique par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \leqslant q^n$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, il vient

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} q^k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Puisque $|q| < 1$, d'après la question 1.a), on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. A fortiori, elle est majorée.

Il existe donc un réel M positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k \leqslant M$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0, v_n \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M$.

Or, pour tout $n \leqslant n_0 - 1$, puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$v_n \leqslant v_{n_0-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M.$$

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M$.

$\boxed{\text{On en déduit que la suite}\, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\, \text{est croissante et majorée.}}$

(c) D'après le théorème de la limite monotone, on en conclut que $\boxed{\text{la suite}\, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\, \text{est convergente.}}$

5. (a) Par hypothèse, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et puisque $l > 0$, on en déduit par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(l)$ d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l).}$$

(b) Appliquons le lemme de Césaro à la suite $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)}{n} = \dfrac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n}$.

D'après la question 3, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l)$, on déduit du lemme de Césaro que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(l)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(u_n)}{n} = S_n + \dfrac{\ln(u_0)}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_0)}{n} = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(l).}$$

(c) Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(u_n)}{n}} = e^{\ln(l)} = l.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, e^{\frac{\ln(u_n)}{n}} = e^{\ln(u_n^{\frac{1}{n}})} = u_n^{\frac{1}{n}}$.

On en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l.}$

Problème 2 : Une suite définie par récurrence

Partie I

1. (a) • On a $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+$ donc par opérations sur les limites, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty.}$

• Par théorème de croissances comparées, on a immédiatement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+.}$

(b) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x > 0$:

$$\boxed{h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.}$$

(c) Or, $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ et pour tout $x > 0, x^2 > e$. Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = e^{ax} > 0$, pour avoir $f(x) = x$, il faut nécessairement que x soit strictement positif.

On suppose dorénavant $x > 0$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow e^{ax} = x \Leftrightarrow ax = \ln(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = a \Leftrightarrow h(x) = a.$$

On a les cas suivants :
• Si $a \in]-\infty, 0]$, puisque h est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $h(]0, 1]) =]-\infty, 0]$ donc il existe un unique réel $x \in]0, 1]$ tel que $h(x) = a$.
Par ailleurs, $h(]1, +\infty[) = h(]1, e] \cup [e, +\infty[) = h(]1, e]) \cup h([e, +\infty[) =]0, \frac{1}{e}] \cup]0, \frac{1}{e}[=]0, \frac{1}{e}]$ donc il n'existe pas de réel $x \in]1, +\infty[$ pour lequel $h(x) = a$.

$$\boxed{\text{Si } a \leqslant 0, \text{il existe un unique réel } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ pour lequel } f(x) = x.}$$

• Supposons que $a \in]0, \frac{1}{e}[$. On a vu que $h(]0, 1]) =]-\infty, 0]$ donc il n'existe pas de réel $x \in]0, 1]$ tel que $h(x) = a$.
Puisque h est continue et strictement croissante sur $]1, e[$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]1, e[$ sur $h(]1, e[) =]0, \frac{1}{e}[$ donc il existe un unique réel $x_0 \in]1, e[$ tel que $h(x_0) = a$.
De même, puisque h est continue et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $h(]e, +\infty[) =]0, \frac{1}{e}[$ donc il existe un unique réel $x_1 \in]e, +\infty[$ tel que $h(x_1) = a$.

$$\boxed{\text{Si } a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[, \text{l'équation } f(x) = x \text{ admet deux solutions sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

• Si $a = \dfrac{1}{e}$, on voit d'après le tableau de variation de h qu'il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ pour lequel $h(x) = \dfrac{1}{e}$ et on a $x = e$.

$$\boxed{\text{Si } a = \frac{1}{e}, \text{il existe un unique réel } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ pour lequel } f(x) = x.}$$

• $\boxed{\text{Si } a > \frac{1}{e} \text{il n'existe pas de réel } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ pour lequel } f(x) = x}$ puisque

$$h(\mathbb{R}_+^*) = h(]0, e] \cup [e, +\infty[) = h(]0, e]) \cup h([e, +\infty[) = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right] \cup \left]0, \frac{1}{e}\right] = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right].$$

Partie II

1. • Si $a = 0$, la fonction f est constante égale à 1 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
   • Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} ax = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition de limites, on obtient
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty.}$$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = ae^{ax}$. Or, $a \geqslant 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{ax} > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0$, ce qui assure que $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

3. Tout d'abord, remarquons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+$ (qui est le domaine de définition de f).

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.

   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = e^{a\times 0} = 1 \geqslant 0 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

   On sait par hypothèse de récurrence que $u_n \leqslant u_{n+1}$ avec u_n et u_{n+1} deux réels positifs.

   Or, d'après la question précédente, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

   On a donc bien montré que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

4. On suppose que $a \in [0, \frac{1}{e}]$.

   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant e$.

   •**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \leqslant e$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \leqslant e$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant e$.

   On sait d'après la question 1 de la partie II que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

   $$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(e) = e^{a\times e}.$$

   Or, on a supposé $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$ donc $0 \leqslant a \times e \leqslant 1$ et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $e^{a\times e} \leqslant e^1 = e$ donc $u_{n+1} \leqslant e^{a\times e} \leqslant e$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant e.}$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante (d'après la question précédente) et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

   Remarque : on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers un point fixe de f et d'après la partie I, si $a \in [0, \frac{1}{e}]$, la fonction f admet bien des points fixes.

5. On suppose que $a > \dfrac{1}{e}$. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

   Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. D'après le théorème de la limite monotone, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge.

   Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle converge vers un réel positif l.

   Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait par caractérisation séquentielle de la limite que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$ donc l est un point fixe de f.

   Or, d'après la partie I, si $a > \frac{1}{e}$, la fonction f n'admet pas de point fixe.

   On aboutit à une contradiction, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et non majorée. Par théorème, on en déduit que

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie III

1. Puisque $a < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} ax = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites, on obtient

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{ax} = 0.}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = ae^{ax}$. Or, $a < 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^{ax} > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f'(x) < 0$, ce qui assure que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

3. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

•Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \in [0, 1]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n \in [0, 1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$. On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1]$ et f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ d'après la question précédente donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [f(1), f(0)] = [e^a, 1].$$

Or, $a < 0$, donc $e^a \in]0, 1[$, d'où $[e^a, 1] \subset [0, 1]$ et il s'ensuit que $u_{n+1} \in [0, 1]$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1].}$$

(b) • Montrons que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, i.e. montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$.

-**Initialisation :** On a $u_0 = 0, u_1 = f(u_0) = f(0) = e^0 = 1, u_2 = f(u_1) = f(1) = e^a > 0$ donc $u_2 > u_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

-**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$.

Montrons que $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$.

Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ donc par croissance de $f \circ f$, on obtient $(f \circ f)(u_{2n}) \leqslant (f \circ f)(u_{2n+2})$, i.e.$u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

• Montrons que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, i.e. montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$.

-**Initialisation :** On a $u_1 = 1$ et $u_3 = f(u_2) = e^{ae^a}$. Or, $ae^a < 0$ donc $u_3 = e^{ae^a} < 1 = u_1$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

-**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$.

Montrons que $u_{2n+3} \geqslant u_{2n+5}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$ donc par croissance de $f \circ f$, on obtient $(f \circ f)(u_{2n+1}) \geqslant (f \circ f)(u_{2n+3})$, i.e.$u_{2n+3} \geqslant u_{2n+5}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(c) D'après la question 3.a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [0, 1]$ et $u_{2n+1} \in [0, 1]$ donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

En particulier, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que

$$\boxed{\text{les suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes.}}$$

De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{2n} \leqslant 1$ et $0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant 1$, par passage à la limite avec des inégalités larges, on en déduit

$$\boxed{0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_{2n} \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} \leqslant 1.}$$

4. Soit $x \in]0,1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)=x &\Leftrightarrow\ e^{ae^{ax}}=x\\ &\Leftrightarrow\ ae^{ax}=\ln(x)\quad(\text{possible car } x>0)\\ &\Leftrightarrow\ e^{ax}=\frac{\ln(x)}{a}.\end{aligned}$$

Puisque $x\in]0,1[$, on a $\ln(x)<0$ donc $\dfrac{\ln(x)}{a}>0$ car $a<0$. On a donc l'équivalence

$$\boxed{(f\circ f)(x)=x \Leftrightarrow ax=\ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right)\Leftrightarrow ax-\ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right)=0.}$$

5. (a) La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0,1[$ et on a pour tout $x\in]0,1[$:

$$\boxed{g'(x)=a-\frac{\frac{1}{ax}}{\frac{\ln(x)}{a}}=a-\frac{1}{x\ln(x)}.}$$

De même, g' est dérivable sur $]0,1[$ et on a pour tout $x\in]0,1[$,

$$\boxed{g''(x)=\frac{\ln(x)+x\times\frac{1}{x}}{(x\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}.}$$

(b) On a pour tout $x\in]0,1[, (x\ln(x))^2>0$ donc le signe de $g''(x)$ dépend uniquement du numérateur.
Par stricte croissance de ln sur $]0,1[$, on a

$$g''(x)>0\Leftrightarrow \ln(x)+1>0\Leftrightarrow \ln(x)>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

On a donc $g''(x)>0\Leftrightarrow x\in]e^{-1},1[, g''(x)<0\Leftrightarrow x\in]0,e^{-1}[$ et $g''(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$.
Ainsi, la fonction g' est strictement décroissante sur $]0,e^{-1}[$ et strictement croissante sur $]e^{-1},1[$.
On en déduit que pour tout $x\in]0,1[, g'(x)\geqslant g'(e^{-1})$.
Or, $g'(e^{-1})=a-\dfrac{1}{e^{-1}\ln(e^{-1})}=a-\dfrac{1}{-e^{-1}}=a+e>0$ car $a>-e$.
Il en découle que pour tout $x\in]0,1[, g'(x)>0$.
$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0,1[.}$

(c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ donc d'après le théorème de la bijection, g est bijective de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$.
Puisque g est strictement croissante sur $]0,1[$, d'après le théorème de la limite monotone, g admet des limites en 0^+ et 1^- et on aura $g(]0,1[)=]\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to1^-}g(x)[$.

- On a $\lim\limits_{x\to0^+}ax=0$.

Par ailleurs, on sait que $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ et puisque $a<0$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x)}{a}=+\infty$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, donc par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right)=+\infty.$$

Finalement, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = -\infty$.

• On a $\lim_{x\to 1^-} ax = a$.

Par ailleurs, on a $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{a} = 0^+$ car $a < 0$.
Or, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = -\infty.$$

Finalement, par somme de limites, on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = +\infty.$$

Ainsi, $g(]0,1[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ donc $\boxed{g \text{ réalise une bijection de }]0,1[\text{ sur } \mathbb{R}.}$

6. On a $(f\circ f)(0) = f(1) = e^a \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe de $f\circ f$.
De même, $(f\circ f)(1) = f(e^a) = e^{ae^a}$.
Or, $e^a > 0$ et $a < 0$ donc $ae^a < 0$ d'où par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $(f\circ f)(1) = e^{ae^a} < e^0 = 1$ donc 1 n'est pas non plus un point fixe de $f\circ f$.
Ainsi, $f\circ f$ admet un point fixe dans $[0,1]$ si et seulement si $f\circ f$ admet un point fixe dans $]0,1[$.
Or, d'après la question 4, on pour tout $x \in]0,1[$:
$$(f\circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$
De plus, d'après la question précédente, g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $x \in]0,1[$ tel que $g(x) = 0$, i.e. il existe un unique réel $x \in]0,1[$ tel que $(f\circ f)(x) = x$ donc $\boxed{f\circ f \text{ admet un unique point fixe dans } [0,1].}$

7. D'après la question 3.c), les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et (u_{2n+1}) sont convergentes de limites appartenant à $[0,1]$.
Par ailleurs, ce sont des suites définies par récurrence au moyen de la fonction $f\circ f$ (en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = (f\circ f)(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = (f\circ f)(u_{2n+1})$).
Donc les limites respectives de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des points fixes de $f\circ f$ dans $[0,1]$.
Or, d'après la question précédente, $f\circ f$ admet un unique point fixe dans $[0,1]$. Notons-le l.
Nécessairement, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, on sait que ceci implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de même limite.
On en conclut que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = l.}$