
DEVOIR MAISON N°9
A RENDRE POUR LE JEUDI 15 JANVIER 2026

Exercice 1 : Un système différentiel

On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 8x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases},$$

c'est à dire qu'on souhaite trouver tous les couples de fonctions (x_1, x_2) dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient ce système pour tout réel t .

Pour un tel couple de fonctions, on pose pour tout réel t , $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (S) équivaut à l'égalité matricielle $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. (a) Montrer qu'il existe un seul réel λ tel que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
(b) Pour le réel λ trouvé dans la question précédente, déterminer toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AU = \lambda U$.

Dans toute la suite, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que la matrice P est inversible et expliciter P^{-1} .
4. Montrer que $P^{-1}AP = T$.

Soit (x_1, x_2) un couple de solutions de (S) .

On pose pour tout réel t , $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

5. (a) Vérifier que pour tout réel t , $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et montrer que le système (S) équivaut à l'égalité matricielle $Y'(t) = TY(t)$.
(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2'(t) = y_2(t)$ puis expliciter $y_2(t)$ pour tout réel t en fonction d'une constante μ .
(c) Montrer que pour tout réel t , $y_1'(t) - y_1(t) = -2y_2(t)$. Résoudre cette équation différentielle pour expliciter $y_1(t)$ pour tout réel t .
(d) Montrer qu'il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout réel t ,

$$\begin{cases} x_1(t) &= (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu te^t \\ x_2(t) &= \lambda e^t - 2\mu te^t \end{cases}.$$

Donner l'unique couple de solutions (x_1, x_2) vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$.

Exercice 2 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

Le but de cette partie est d'exprimer A^n pour tout entier naturel n .

1. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \lambda X$.

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

- (a) $AX = X$.
- (b) $AX = -X$.
- (c) $AX = 2X$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
- (b) Calculer $P^{-1}AP$. On appelle D la matrice diagonale obtenue.
- (c) Calculer D^n pour tout entier naturel n .
- (d) Montrer que pour tout entier naturel n , $P^{-1}A^nP = D^n$.
- (e) En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n .

Partie II : Etude de la suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 = -6, u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n .
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.