

Corrigé de la liste d'exercices n°14

Matrices

Exercice 1

- $AB = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 15 & 13 & 12 \end{pmatrix}$
- Impossible.
- $AD \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc $AD - C$ n'a pas de sens.
- $BC + 4A = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 19 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 27 & 21 \end{pmatrix}$
- $B + 2$ n'a pas de sens.
- $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc $B + 2C$ n'a pas de sens.
- $AB \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ donc $AB + 3I_2$ n'a pas de sens.
- $(A - 4I_2)(2A - I_2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$
- $2A^2 - 9A + 4I_2 = (A - 4I_2)(2A - I_2) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}.$

Exercice 2

- Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse** : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

1er cas : si $a + d = 0$, alors $d = -a$ et les première et dernière lignes du système donnent $bc = 1 - a^2$.

- Si $b = 0$, on obtient $a^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et on obtient les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$
ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

- Si $b \neq 0$, on obtient $c = \frac{1 - a^2}{b}$, ce qui donne les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$
avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2ème cas : si $a + d \neq 0$, on a nécessairement $b = c = 0$ puis $a^2 = 1$ et $d^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et $d = \pm 1$ avec la condition $d \neq -a$ donc nécessairement $a = d$. On obtient alors les matrices I_2 et $-I_2$.

•**Synthèse :**

- Soit $c \in \mathbb{R}$. On a bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On a bien $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} = I_2$.

Enfin, on a bien $I_2^2 = (-I_2)^2 = I_2$ donc les matrices cherchées sont toutes celles trouvées dans l'analyse.

2. Soit $A = 2B - I_2 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}(A + I_2)$. On a alors

$$B^2 = B \Leftrightarrow \frac{1}{4}(A + I_2)^2 = \frac{1}{2}(A + I_2) \Leftrightarrow A^2 + 2A + I_2 = 2(A + I_2) \Leftrightarrow A^2 = I_2$$

donc A est de la forme d'une des matrices trouvées dans la question précédente.

- Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

- Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$. Alors $B = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{1-a^2}{2b} & \frac{1-a}{2} \end{pmatrix}$.

- Si $A = I_2$, alors $B = I_2$ et si $A = -I_2$, alors $B = 0_2$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} AJ = JA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = a_{4,2} = a_{4,3} = 0 \\ a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{4,4} \\ a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,4} \\ a_{1,3} = a_{2,4} \\ a_{2,1} = a_{3,2} = a_{4,3} = 0 \\ a_{3,1} = a_{4,2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1. On a $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A$ est bien une matrice symétrique.
2. • Si $A = 0$, il est clair que $A^T A = 0$.
• Réciproquement, supposons que $A^T A = 0$ et montrons que $A = 0$.
Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$0 = (A^T A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j}.$$

En particulier, pour $i = j$, on obtient pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 = 0$. C'est une somme nulle dont tous les termes sont positifs (car ce sont des carrés de nombres réels) donc nécessairement, tous les termes sont nuls, i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{k,i} = 0$, ce qui implique que $A = 0$.

Exercice 5

Echelonnnons les matrices pour déterminer leur rang.

1. C'est une matrice à deux colonnes non proportionnelles donc elle est de rang 2.

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc la matrice est de rang 2.}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 13 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 7L_4 - 4L_2]{L_3 \leftarrow 7L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow 6L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc la matrice est de rang 3.}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{pmatrix} \text{ donc la matrice est de rang 3.}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow 3L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ donc la matrice est de rang 4.}$$

Exercice 6

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}, AX = \lambda X &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}, (A - \lambda I_3)X = 0 \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3. \end{aligned}$$

On cherche donc les réels λ tels que le rang de $A - \lambda I_3$ soit strictement inférieur à 3.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons le rang de $A - \lambda I_3$ en fonction de λ . On a

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-2)L_1} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 + 5\lambda - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 6\lambda - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-4) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• Si $\lambda \notin \{0, 2, 4\}$, on remarque que $\text{rg}(A - \lambda I_3) = 3$ (les trois pivots sont non nuls).

• Si $\lambda = 2$, on a obtenu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A - 2I_3) = 2 < 3$.

• Si $\lambda = 4$, on a obtenu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A - 4I_3) = 2 < 3$.

• Si $\lambda = 0$, on a obtenu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A) = 2 < 3$.

Finalement, les trois réels cherchés sont $\{0, 2, 4\}$.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1, L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 2X$. On obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2x \\ -x + y + z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 4X$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 4x \\ -x + y + z = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 3y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -4y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_4 + bJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque aI_4 et bJ commutent, on peut utiliser la formule de binôme et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_4)^{n-k} (bJ)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k.$$

$$\text{Or, } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J^4 = J^3 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4 \text{ donc pour tout } k \geq 4, J^k = 0_4 \text{ d'où}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k = a^n I_4 + na^{n-1}bJ + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 J^3 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 8

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = -I_2$ donc $A^3 = -A$ puis $A^4 = -A^2 = I_2$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{4n} = (A^4)^n = I_2^n = I_2, A^{4n+1} = A^{4n} \times A = A, A^{4n+2} = A^{4n} \times A^2 = -I_2 \text{ puis } A^{4n+3} = A^{4n+2} \times A = -A.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geq 3$, $J^n = 0_3$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + J$ où J est la matrice de la question précédente. Puisque I_2 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} J^k = I_2 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

car $J^k = 0_3$ pour tout $k \geq 3$.

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que $A^0 = I_2$ et pour tout $n \geq 1$, $A^n = A$.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 14 & -23 \\ -4 & 9 & -15 \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 14 & -23 \\ -4 & 9 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{3n} = (A^3)^n = (I_3)^n = I_3$, $A^{3n+1} = A$ et $A^{3n+2} = A^2$.

Exercice 9

1. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ puis $J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On peut montrer par une récurrence immédiate que pour tout $n \geq 1$, $J^n = 2^{n-1}J$ (et $J^0 = I_2$).

2. On a $A = 4I_2 + 2J$. Puisque $4I_2$ et $2J$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4I_2)^{n-k} (2J)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^{n-k} 2^k J^k = 4^n I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k} 2^{k-1} J$$

$$\text{d'où } A^n = 4^n I_2 + \left(2^{2n-1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) J = 4^n I_2 + \left(2^{2n-1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right) \right) J \text{ i.e.}$$

$$A = 2^{2n} I_2 + 2^{2n-1} (2^n - 1) J.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n} + 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n-1}(2^n - 1) \\ 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n} + 2^{2n-1}(2^n - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n-1}(2^n + 1) & 2^{2n-1}(2^n - 1) \\ 2^{2n-1}(2^n - 1) & 2^{2n-1}(2^n + 1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

1. On a

$$\begin{aligned} C^2 - 4C &= \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 24 & -40 \\ 8 & -23 & 40 \\ 8 & -24 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 24 & -40 \\ 8 & -20 & 40 \\ 8 & -24 & 44 \end{pmatrix} \\ &= -3I_3. \end{aligned}$$

2. Ainsi, $C(C - 4I_3) = -3I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4I_3 - C)C = I_3$.

$$\text{On en déduit que } C \text{ est inversible et que } C^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - C) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 \\ -2 & 9 & -10 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- On a $C^0 = I_3 = a_0 C + b_0 I_3$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $C^n = a_n C + b_n I_3$. On a alors

$$C^{n+1} = C^n \times C = (a_n C + b_n I_3) C = a_n C^2 + b_n C = a_n (4C - 3I_3) + b_n C = (4a_n + b_n) C - 3a_n I_3.$$

Posons $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n$ et on a bien $C^{n+1} = a_{n+1} C + b_{n+1} I_3$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Exercice 11

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a pour tout } n \in \mathbb{N}, AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ x_n - y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, $A^n X_0 = A^0 X_0 = X_0 = X_n$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n = A^n X_0$.

On a alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = (A^2)^n = (2I_2)^n = 2^n I_2$ et $A^{2n+1} = A^{2n} \times A = 2^n A$.

4. D'après les questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = X_{2n} = A^{2n} X_0 = 2^n X_0 = 2^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} = y_{2n} = 2^n$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{pmatrix} = X_{2n+1} = A^{2n+1} X_0 = 2^n A X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(x_0 + y_0) \\ 2^n(x_0 - y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n+1} = 2^{n+1}$ et $y_{2n+1} = 0$.

Exercice 12

1. On remarque que $2A + B = C$.

2. • On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ puis

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \geq 1$, $A^n = 3^{n-1} A$.

• On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B$ puis

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4B.$$

On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \geq 1$, $B^n = 2^{n-1} B$.

3. On vérifie que A et B commutent. En effet,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $2A$ et B commutent. On peut donc utiliser la fomule du binôme de Newton et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
C^n = (2A + B)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2A)^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} A^{n-k} B^k \\
&= 2^n A^n + B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{n-k-1} 2^{n-1} AB \\
&= 2^n A^n + B^n \\
&= 2^n \times 3^{n-1} A + 2^{n-1} B.
\end{aligned}$$

Exercice 13

On sait qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -4 & 8 & -14 \\ -3 & 7 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang $2 < 3$, elle n'est donc pas inversible.

$$2. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2]{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 6 & -12 & 21 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$3. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3]{L_1 \leftarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 12L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -107 & -21 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 9L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -107 & -21 & 0 & 1 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 + 107L_2]{L_1 \leftarrow 2L_1 - 9L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & -9 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42 & 107 & 2 & -24 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{42}L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{42}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 42 & 0 & 0 & 25 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42 & 107 & 2 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{42}L_3]{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{42} & \frac{4}{42} & -\frac{6}{42} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{42} & -\frac{2}{42} & \frac{24}{42} \end{array} \right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\frac{1}{42} \begin{pmatrix} 25 & 4 & -6 \\ 21 & 0 & 0 \\ -107 & -2 & 24 \end{pmatrix}$.

4. La matrice est de déterminant $-14 \neq 0$ donc est inversible d'inverse $\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$5. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow 5L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 36 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -24 & 29 & -2 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 + 6L_2]{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & -30 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 36 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 245 & -20 & 30 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 - \frac{5}{28}L_3]{L_1 \leftarrow -49L_1 + 6L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 490 & 0 & 0 & 125 & -65 & 30 \\ 0 & 980 & 0 & -15 & 145 & -180 \\ 0 & 0 & 245 & -20 & 30 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{245}L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{490}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{980}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{125}{490} & -\frac{65}{490} & \frac{30}{490} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{980} & \frac{145}{980} & -\frac{180}{980} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{20}{245} & \frac{30}{245} & \frac{5}{245} \end{array} \right)$$

donc la matrice est inversible d'inverse $\frac{1}{980} \begin{pmatrix} 250 & -130 & 60 \\ -15 & 145 & -180 \\ -80 & 120 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{196} \begin{pmatrix} 50 & -26 & 12 \\ -3 & 29 & -36 \\ -16 & 24 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

1. On a

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)(A - 3I_3) &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0_3.}$

2. En développant la relation obtenue à la question précédente, on obtient $A^2 - 5A + 6I_3 = 0$ d'où $5A - A^2 = 6I_3$ ou encore

$$\frac{1}{6}(5I_3 - A)A = I_3,$$

ce qui assure que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I_3 - A)$.

Ainsi, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 15

La matrice M est inversible si et seulement si $\text{rg}(M) = 3$. Déterminons le rang de M en fonction de a .

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 - a & a \\ 0 & 1 - 2a & a \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 - 2a & a \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (2a-1)L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{array} \right).$$

Ainsi, $\text{rg}(M) = 3$ si et seulement si $a \neq 0$. Donc M est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

Exercice 16

1. (a) On a $\det(P) = -2 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

- (b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix}$$

2. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3u_n - v_n) \\ \frac{1}{2}(-u_n + 3v_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

- (b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^n \\ 1-2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(1+2^n) \text{ et } v_n = \frac{1}{2}(1-2^n).$$

Exercice 17

- 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+b & -b+c & -c+a \\ -a+c & -b+a & -c+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & -b+c & -c+a \\ 0 & -b+a & -c+b \end{pmatrix}.$$

3. Remarquons que A est inversible si et seulement si $P^{-1}AP$ est inversible.

En effet, si A est inversible, alors $P^{-1}AP$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Réciproquement, supposons que $P^{-1}AP$ est inversible. Alors $A = P(P^{-1}AP)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Or, si $a+b+c=0$, alors $P^{-1}AP$ possède une colonne nulle donc n'est pas inversible, ce qui implique que A n'est pas inversible dans ce cas.

Exercice 18

1. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A^{k+1} = A^0 - A^p = I_n - A^p.$$

2. Supposons que $A^n = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k = I_n - A^n = I_n$$

donc $(I_n - A)$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

Exercice 19

1. • Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(i+j-2)} = \sum_{k=1}^n (\omega^{i+j-2})^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{i+j-2})^k.$$

▷ Si n divise $i + j - 2$, i.e. $j \equiv 2 - i[n]$, alors $\omega^{i+j-2} = 1$ (car $\omega^n = 1$) donc $(A^2)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

▷ Si n ne divise pas $i + j - 2$, alors $\omega^{i+j-2} \neq 1$ donc $(A^2)_{i,j} = \frac{1 - (\omega^{i+j-2})^n}{1 - \omega^{i+j-2}} = 0$ car $\omega^n = 1$.

$$\text{Ainsi, } A^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- On constate que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $B_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$ donc

$$(B^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n B_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^n \overline{A_{i,k} A_{k,j}} = \overline{\sum_{k=1}^n A_{i,k} A_{k,j}} = \overline{(A^2)_{i,j}} = (A^2)_{i,j}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que A^2 est à coefficients réels. On en déduit que $B^2 = A^2$.

- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} \omega^{-(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(i-j)} = \sum_{k=1}^n (\omega^{i-j})^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{i-j})^k.$$

▷ Si n divise $i - j$, ce qui n'est possible que si $i = j$ puisque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $\omega^{i-j} = 1$ donc $(AB)_{i,j} = n$.

▷ Si $i \neq j$, on a $\omega^{i-j} \neq 1$ et on trouve comme précédemment $(AB)_{i,j} = 0$.

Ainsi, $AB = nI_n$. Le même calcul donne $BA = nI_n$.

2. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{n}B$.

Exercice 20

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons que $J^2 = nJ$. De plus, on a $A = (a - b)I_n + bJ$.

Puisque I_n et J commutent, on a

$$\begin{aligned} A^2 &= (a - b)^2 I_n + 2(a - b)bJ + b^2 J^2 \\ &= (a - b)^2 I_n + 2(a - b)bJ + nb^2 J \\ &= (a - b)^2 I_n + (2(a - b)I_n + nbI_n)bJ \\ &= (a - b)^2 I_n + (2a + (n - 2)b)(A - (a - b)I_n) \\ &= (a - b)(a - b - (2a + (n - 2)b))I_n + (2a + (n - 2)b)A \end{aligned}$$

donc $A(A - (2a + (n - 2)b)I_n) = (a - b)(-a + (1 - n)b)I_n$. (*)

• Si $a = b$, on a $A = aJ$ et l'inégalité ci-dessus nous donne $A(A - naI_n) = 0$. Si A était inversible, en multipliant par A^{-1} , on aurait $A - naI_n = 0$, d'où $A = naI_n$. Puisque $A = aJ$, on aurait $aJ = naI_n$, ce qui ne peut arriver que si $a = 0$. Mais alors $A = 0$ et A ne serait pas inversible. Ainsi, si $a = b$, alors A n'est pas inversible.

• Si $a = (1 - n)b$, on a $A = b(J - nI_n)$ et l'égalité ci-dessus donne $A(A - naI_n) = 0$. Si A était inversible, on aurait comme dans le premier cas $A = naI_n = (n - n^2)bI_n$. Puisque $A = b(J - nI_n)$, on aurait $b(J - nI_n) = (n - n^2)bI_n$ d'où $bJ = (2n - n^2)bI_n$, ce qui n'est possible que si $b = 0$. Mais on aurait alors $A = 0$ et a ne pourrait pas être inversible. Ainsi, si $a = (1 - n)b$, alors A n'est pas inversible.

• Supposons dorénavant que $a \notin \{b, (1 - n)b\}$ et montrons que A est inversible.

Posons $c = (a - b)(-a + (1 - n)b)$. Par hypothèse, $c \neq 0$ et d'après la relation (*), on peut affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{c}(A - (2a + (n - 2)b)I_n)$.

Exercice 21

Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $A^p = B^q = 0_n$.

Puisque A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on a

$$(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

• Si $k \geq p$, $A^k = 0$ par hypothèse.

• Si $k \leq p - 1$, alors $p + q - 1 - k \geq q$ donc $B^{p+q-1-k} = 0$ par hypothèse.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, p + q - 1 \rrbracket$, $A^k B^{p+q-1-k} = 0$ donc tous les termes de la somme sont nuls.

Ainsi, $(A + B)^{p+q-1} = 0$, ce qui prouve que $A + B$ est nilpotente.