Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°4
Samedi 10 janvier 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué d'un exercice, d'un problème et comporte 6 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice : Une suite récurrente

Soit a un réel positif ou nul.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$u_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel positif a, que l'on précisera, pour lequel la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, alors sa limite est 0.
4. Montrer que si $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Dans ce cas, préciser sa limite.
5. On suppose dans cette question qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant k, u_n < \sqrt{n}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
   (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
6. On suppose dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, que $a > 0$.
   (a) Justifier que pour tout $n \geqslant 1, u_n > 0$.
   (b) Montrer l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = 2^{n-1}\ln(a) - 2^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}.$$

On pose désormais pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 2^{-n-1}\ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

7. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

   (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n.$$

   (d) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}\ln(2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(2).$$

   (e) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite, qu'on notera V, vérifie l'encadrement

$$\frac{\ln(2)}{2} \leqslant V \leqslant \ln(2).$$

8. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement s'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $u_k < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si $a < e^{\frac{V}{2}}$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $a \geqslant e^{\frac{V}{2}}$.
9. Montrer que si $a < \sqrt[4]{2}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que si $a \geqslant \sqrt{2}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Problème : Théorème de Charkovski

Dans tout le problème, on note I le segment $[0,1]$ et on considère une fonction $f : I \longrightarrow I$ continue.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la fonction $f \circ \cdots \circ f$ (itérée n fois).
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un point $x \in I$ est dit *n-périodique* pour f si $f^n(x) = x$ et si $f^p(x) \neq x$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$. L'entier n s'appelle la *période* de x. Un point $x \in I$ est dit *périodique* s'il est n-périodique pour au moins un entier $n \geqslant 1$.
Par exemple, un point fixe de f est un point 1-périodique.
Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant, dû à Charkovski(1964) :

Si f admet un point 3-périodique dans I, alors f admet des points n-périodiques pour tout entier naturel n non nul.

Ce théorème est souvent résumé sous la formule suivante : « 3-cycle implique chaos ».
Le problème est constitué de quatre parties indépendantes :
• Dans la Partie I, on examine quelques exemples.
• Dans la Partie II, on montre qu'il existe une fonction qui admet un point 5-périodique mais pas de point 3-périodique.
• Dans la Partie III, on construit à partir d'une fonction f une fonction F qui a des points périodiques de périodes doubles de celles de f.
• Enfin, on démontre le théorème de Charkovski dans la Partie IV.

Partie I : Premiers exemples

1. Soit $f : I \longrightarrow I$ continue.
   (a) Montrer que f admet au moins un point fixe sur I.
   (b) Donner un exemple de fonction f qui a un unique point fixe et qui n'a aucun point n-périodique pour $n > 1$.
2. On définit
$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases} \end{array}$$
   (a) Montrer que f est continue sur I et tracer son graphe.
   (b) Montrer que f admet un point 3-périodique que l'on précisera.
   On pourra le rechercher dans l'intervalle $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$.

Partie II : 5-périodicité n'implique pas 3-périodicité

On considère dans cette partie la fonction f continue sur I définie par :
$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}, f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4} \text{ et } f(1) = 0 \\ f \text{ est affine sur } \left[\dfrac{k}{4}, \dfrac{k+1}{4}\right] \text{ pour tout } k \in [\![0,3]\!]. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Montrer que 0 est un point périodique pour f et préciser sa période.
3. Donner les images respectives des intervalles $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{3}{4}, 1]$ par $f^3 = f \circ f \circ f$.
   La fonction f admet-elle un point 3-périodique dans l'un de ces intervalles ?

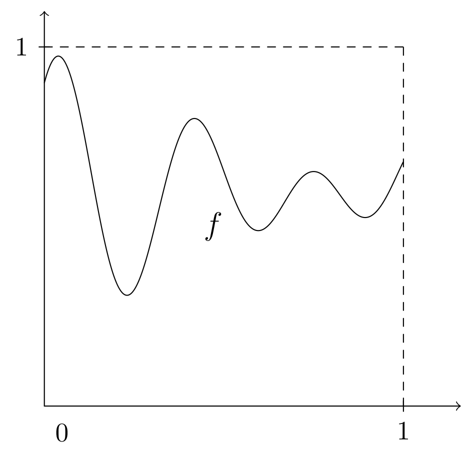
4. Montrer que f^3 est strictement monotone sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. En déduire que f^3 admet un unique point fixe sur I.
5. En conclure que f n'admet pas de point 3-périodique.

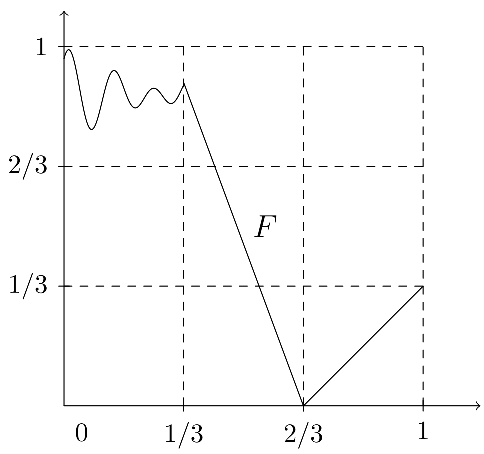
Partie III : Doublement de période

Soit $f : I \longrightarrow I$ continue. On appelle « double de f »la fonction $F : I \longrightarrow I$ telle que :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{f(3x)}{3} \,\text{si}\, x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ F\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 \,\text{et}\, F(1) = \dfrac{1}{3} \\ F \,\text{est continue sur}\, [0,1] \,\text{et affine sur}\, \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right] \,\text{et sur}\, \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Concrètement, on divise le segment $[0, 1]$ sur l'axe des abscisses en trois tiers, ainsi que sur l'axe des ordonnées, on compresse le graphe de f par un facteur $\dfrac{1}{3}$ et on le met dans le coin supérieur gauche. Enfin, on relie les points avec des fonctions affines, comme dans le graphe suivant.





1. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$ puis pour $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$.
2. Montrer que $F\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ et que $F\left(\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$.
3. Montrer que F admet un unique point fixe sur I, et que celui-ci se situe dans $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$.

Dans les questions suivantes, on notera p ce point fixe.

4. Soit $x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$ avec $x \neq p$.
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n)$.
   On souhaite montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \notin \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$.
   Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$.
   (a) Soit a le cœfficient directeur de F sur le segment $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$. Montrer que $a \leqslant -2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - p| \geqslant 2|u_n - p|$.

(c) En déduire que $|u_n - p| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et aboutir à une absurdité.

(d) Montrer l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \notin \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$.

(e) En conclure que F n'admet aucun point périodique dans $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, mis à part son point fixe.

5. Soit $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

   (a) Donner la valeur de $F(x), F^2(x), F^3(x)$ et $F^4(x)$.

   (b) Donner par récurrence sur k la valeur de $F^{2k}(x)$ et de $F^{2k+1}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que si x est un point périodique de f de période $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{x}{3}$ est un point périodique de F de période $2n$.

6. Soit $x \in I$ un point périodique de F qui n'est pas un point fixe de F.

   (a) Montrer que la période de x est un entier pair. On la note $2q$, pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que l'un des deux nombres x et $F(x)$ appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

   (c) On suppose dans cette question que $x \in [0, \frac{1}{3}]$.Montrer que $3x$ est q-périodique pour f.

   (d) On suppose dans cette question que $F(x) \in [0, \frac{1}{3}]$. Montrer que $3F(x)$ est q-périodique pour f.

7. Montrer finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet un point n-périodique si et seulement si F admet un point $2n$-périodique.

8. *Application :* En déduire qu'il existe une fonction admettant un point 10-périodique mais aucun point 6-périodique.

Partie IV : Preuve du théorème

Soit $f : I \longrightarrow I$ continue.

1. Soit J un segment non vide inclus dans I. Soit K un segment non vide inclus dans $f(J)$. On se propose de montrer qu'il existe un segment L inclus dans J tel que $K = f(L)$.

   (a) On suppose K réduit à un point. Montrer l'existence de L.

   On suppose désormais $K = [\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$. Considérons $(a, b) \in J^2$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

   Sans perte de généralité (l'autre cas étant analogue), on suppose dans la suite que $a < b$.

   (b) Soit $A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$. Montrer que A admet une borne inférieure puis que cette borne inférieure est un minimum. On notera $v = \min(A)$.

   (c) Soit $B = \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$. Montrer de même l'existence de $u = \max(B)$.

   (d) En déduire l'existence de L.

2. Soit K un segment non vide inclus dans I tel que $K \subset f(K)$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Lorsque I_0 et I_1 sont deux segments inclus dans I, on dit que I_0 *f-recouvre* I_1, et on note $I_0 \to I_1$, si $I_1 \subset f(I_0)$.
On note $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n$ si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], I_k \to I_{k+1}$.

3. On suppose qu'il existe $n+1$ segments non vides $I_0, I_1, \ldots, I_n$ inclus dans I tels qu'on ait $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n$.
   Montrer qu'il existe une famille $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de segments non vides tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $J_k \subset I_k$, pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(J_k) = J_{k+1}$ et $f(J_{n-1}) = I_n$.
   Si $x_0 \in J_0$, que peut-on dire des $f^k(x_0)$ où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?
4. On suppose que f admet un point 3-périodique x.
   On introduit les réels $x_0 = \min\{x, f(x), f^2(x)\}, x_1 = f(x_0)$ et $x_2 = f(x_1)$.
   A l'aide de x_0, x_1, x_2, déterminer deux segments S_1 et S_2 inclus dans I ayant un seul point commun tels que $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$.
   En déduire que f admet un point fixe et un point 2-périodique.
   On pourra distinguer les cas $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_1$.
5. On suppose toujours que x est un point 3-périodique.
   Montrer qu'il existe un point n-périodique pour tout $n \geqslant 1$.
   On cherchera une suite de la forme $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$.