Liste d'exercices n°15 — Dérivabilité

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I. Soient f et g deux fonctions continues sur I et dérivables en a. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$.

Exercice 2. Etudier la fonction $f\colon x \longmapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 3. Considérons l'équation (E) suivante, d'inconnue x réelle :

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}.$$

1. Etudier la fonction $x \longmapsto \arctan(2x)+\arctan(x)$.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, leurs dérivées n-ièmes.

1. cos
2. $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$

Exercice 5. Montrer que la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6. Considérons la fonction suivante : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que pour tout réel x strictement positif, on ait :

$$f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

3. Expliciter les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $t \longmapsto (2t+1)^7$
2. $u \longmapsto \dfrac{1}{3u}$
3. $x \longmapsto e^{\sin(x)}\cos(x)$
4. $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$

5. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
6. $x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
7. $u \longmapsto \dfrac{1}{u\ln(u)}$

Exercice 8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, que $f'(a) > 0$ et que $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe trois éléments c_1, c_2 et c_3 dans $]a;b[$ tels que :

$$c_1 < c_2 < c_3 \quad \text{et} \quad f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 9. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a;b[$ tel que :
$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$
2. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$, que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$.
   (a) Montrer que g ne s'annule pas sur $]a, b]$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe un élément $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 11. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe un élément c de $]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 12. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f et f' ont des limites finies en $+\infty$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ tel que $f(a) = f(b) = 0$ et $c \in]a, b[$.
Montrer qu'il existe $\gamma \in]a, b[$, tel que $f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$.

Exercice 14.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{5}(4 - x^2)$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
   (b) Déterminer les points fixes de f.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{5}$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Quel est l'unique point fixe de f dans $[0, 1]$? On le notera l dans la suite.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{2}{5}|u_n - l|$.
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (f) Expliciter un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant 10^{-10}$.

Exercice 15. (Théorème du point fixe de Picard)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$ avec $k < 1$.

1. On suppose que f est k-lipschitzienne sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.
   (b) En déduire que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$.
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe.
2. On suppose que $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - lx$ existe.