Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°4

Exercice : Une suite récurrente

1. On a pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} \geqslant 0$ donc pour tout $n \geqslant 2, u_n \geqslant 0$.

   Par ailleurs, $u_1 = a \geqslant 0$ donc on a bien $\boxed{u_n \geqslant 0 \,\text{pour tout}\, n \geqslant 1.}$

2. On a les équivalences suivantes :

   $$(u_n)_{n\geqslant 1}\,\text{est constante} \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1, \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} = u_n \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1, u_n(u_n - \sqrt{n}) = 0$$

   ce qui équivaut à dire que pour tout $n \geqslant 1, u_n = 0$ ou $u_n = \sqrt{n}$.

   Or, s'il existait un $n \geqslant 1$ tel que $u_n = \sqrt{n}$, on aurait $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ puis $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} \neq \sqrt{n} = u_{n+1}$ donc la suite ne serait pas constante.
   Ainsi, la suite est constante si et seulement si pour tout $n \geqslant 1, u_n = 0$. En particulier, ceci impose $u_1 = a = 0$ et dans ce cas, on a bien pour tout $n \geqslant 1, u_n = 0$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la suite}\,(u_n)_{n\geqslant 1}\,\text{est constante si et seulement si}\,a = 0.}$

3. Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Par opérations sur les limites, on a

   $$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} = l \times 0 = 0.$$

   On a donc bien montré que $\boxed{\text{si}\,(u_n)_{n\geqslant 1}\,\text{converge, alors}\, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

4. Supposons que pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{n}$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on obtient directement par comparaison que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$
   En particulier, si $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a pour tout $n \geqslant 1, u_n > 0$ et

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1$$

   donc pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} \geqslant u_n$, ce qui prouve que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1}\,\text{est croissante.}}$

5. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant k, u_n < \sqrt{n}$.
   •**Initialisation :** Pour $n = k$, on a bien par hypothèse $u_k < \sqrt{k}$.
   •**Hérédité :** Soit $n \geqslant k$ fixé. On suppose que $u_n < \sqrt{n}$. Montrons que $u_{n+1} < \sqrt{n+1}$.
   Puisque pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_n < \sqrt{n}$ donc $u_n^2 < n$ et on a alors

   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \frac{n}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

   ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.
   D'après le principe de récurrence, on a bien $\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant k, u_n < \sqrt{n}.}$

(b) Pour tout $n \geqslant k$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} - u_n = u_n \left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1 \right).$$

Or, pour tout $n \geqslant k$, $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} - 1 \leqslant 0$ (car $u_n < \sqrt{n}$) et $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{(u_n)_{n \geqslant k} \text{ est décroissante.}}$

(c) La suite $(u_n)_{n \geqslant k}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite mononte, on en déduit que $(u_n)_{n \geqslant k}$ converge.

Or, d'après la question 3, si la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge, sa limite est nécessairement 0.

Ceci justifie que $\boxed{(u_n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers } 0.}$

6. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1, u_n > 0$.

•Initialisation : On a $u_1 = a > 0$ par hypothèse, donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

•Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ fixé tel que $u_n > 0$.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} > 0$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

On a bien montré par récurrence que $\boxed{u_n > 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

(b) Montrons l'égalité voulue par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons que pour tout $n \geqslant 1, \ln(u_n)$ est bien défini car $u_n > 0$ d'après la question précédente.

•Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$2^{n-1} \ln(a) - 2^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} = \ln(a) = \ln(u_1),$$

où on a utilisé que la somme est nulle car vide et que $a > 0$. La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

•Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ fixé. On suppose que $\ln(u_n) = 2^{n-1} \ln(a) - 2^{n-2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$.

Montrons que $\ln(u_{n+1}) = 2^n \ln(a) - 2^{n-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) &= \ln\left(\frac{u_n^2}{\sqrt{n}}\right) \\
&= 2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= 2^n \ln(a) - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} - \frac{2^{n-1}}{2^n} \ln(n) \\
&= 2^n \ln(a) - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

On a donc bien montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = 2^{n-1}\ln(a) - 2^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}.}$$

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n+1} w_k - \sum_{k=0}^{n} w_k = w_{n+1} = \frac{\ln(n+2)}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(b) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} w_k + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-2}\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}(\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln(k) + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} w_k \quad \text{car } w_0 = 0
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).}$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n$.

•**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n = -w_0 = 0$ et $v_0 = \sum_{k=0}^{0} w_k = w_0 = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n$.

Montrons que $v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_{n+1}$.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{2}v_n + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}w_n + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\times 2^{-n-1}\ln(n+1) + 2^{-n-2}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 2^{-n-2}\ln(n+1) + 2^{-n-2}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 2^{-n-2}\ln(n+1) + 2^{-n-2}\ln(n+2) - 2^{-n-2}\ln(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 2^{-n-1}\ln(n+1) + 2^{-n-1}\ln(n+2) - 2^{-n-2}\ln(n+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + 2^{-n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - w_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_{n+1},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n.}$$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
D'une part, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(2)$ car pour tout $k\in[\![2,n]\!], 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\geqslant 0$.
D'autre part, pour tout $k\in[\![1,n]\!], \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant \ln(2)$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \ln(2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \ln(2)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\leqslant \ln(2).$$

On obtient donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{2}\ln(2)\leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant \ln(2).}$$

(e) Pour tout $n\in\mathbb{N}, w_n\geqslant 0$ donc

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant \ln(2).$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\ln(2)$. Or, d'après la question 7.(a), elle est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée V.
De plus, la question précédente permet d'affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}\ln(2) - w_n \leqslant v_n \leqslant \ln(2) - w_n.$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} = 0$.

En passant à la limite dans les inégalités ci-dessus, on obtient donc bien $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{2} \leqslant V \leqslant \ln(2).}$

8. (a) Raisonnons par double implication.
• Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. D'après la question 3, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par définition de la convergence vers 0 (avec $\varepsilon = 1$), et puisque pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$.
En particulier, il existe bien un entier $k \geqslant 2$ tel que $u_k < 1$.
• Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $u_k < 1$. Puisque $k \geqslant 2$, on a $\sqrt{k} \geqslant \sqrt{2} > 1$ donc $u_k < \sqrt{k}$.
D'après la question 5, cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
On a donc bien montré par double implication que

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement s'il existe } k \geqslant 2 \text{ tel que } u_k < 1.}$$

(b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge} &\Leftrightarrow \exists n \geqslant 2, u_n < 1 \\
&\Leftrightarrow \exists n \geqslant 2, \ln(u_n) < 0 \\
&\Leftrightarrow \exists n \geqslant 2, 2^{n-1}\ln(a) < 2^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} \quad \text{(question 6.(b))} \\
&\Leftrightarrow \exists n \geqslant 2, 2\ln(a) < \sum_{k=0}^{n-2} w_k \\
&\Leftrightarrow \exists n \geqslant 2, 2\ln(a) < v_{n-2} \\
&\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, 2\ln(a) < v_{n_0} \\
&\Leftrightarrow 2\ln(a) < \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \quad \text{car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée} \\
&\Leftrightarrow 2\ln(a) < V,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } a < e^{\frac{V}{2}}.}$

(c) D'après les questions 4 et 5, on sait que s'il existe un entier k tel que $u_k < \sqrt{k}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que dans le cas contraire (i.e. pour tout entier $n, u_n \geqslant \sqrt{n}$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
En prenant la négation de l'équivalence montrée en question précédente, on a donc bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ si et seulement si } a \geqslant e^{\frac{V}{2}}.}$

9. D'après la question 7.(e), on sait que
$$\frac{\ln(2)}{2} \leqslant V \leqslant \ln(2) \Leftrightarrow \leqslant \frac{\ln(2)}{4} \leqslant \frac{V}{2} \leqslant \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2} \leqslant e^{\frac{V}{2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

- Si $\boxed{a < \sqrt[4]{2}}$, on a alors $a < e^{\frac{V}{2}}$ et ceci implique d'après la question 8.(b) que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.}$
- Si $\boxed{a \geqslant \sqrt{2}}$, alors $a \geqslant e^{\frac{V}{2}}$ et ceci implique d'après la question précédente que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$

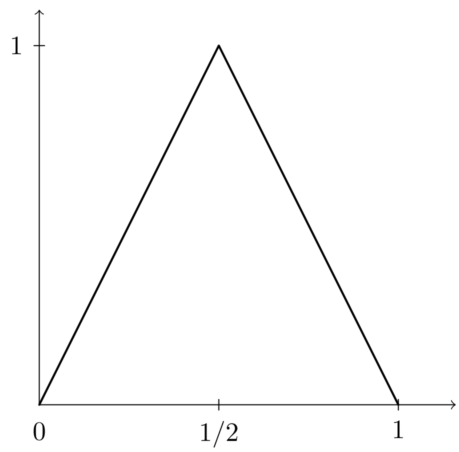
Problème : Théorème de Charkovski

Partie I : Premiers exemples

1. (a) Posons pour tout $x \in I, g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur I comme somme de fonctions continues sur I.
   Puisque f est à valeurs dans $I = [0, 1]$, on a $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ donc $0 \in [g(1), g(0)]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = 0$, i.e. $f(x) = x$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet au moins un point fixe sur } I.}$
   (b) Si f est la fonction nulle sur I, le seul point fixe de f sur I est 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f^n$ est encore la fonction nulle dont le seul point fixe est 0, qui est 1-périodique.

   $\boxed{\text{La fonction nulle n'admet donc pas de point } n\text{-périodique pour } n > 1 \text{ et a un unique point fixe.}}$

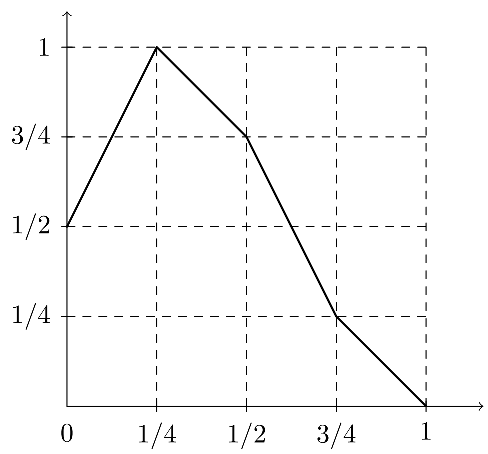
2. (a) La fonction f est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ comme fonction affine. De même, f est continue sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Il reste à vérifier que f est continue en $\dfrac{1}{2}$.
   On a
   $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} 2x = 2 \times \frac{1}{2} = 1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$
   et
   $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2(1-x) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 = f\left(\frac{1}{2}\right).$$
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, ce qui assure que f est continue en $\frac{1}{2}$ et finalement $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$ Le graphe de f est le suivant :



(b) Comme le suggère l'énoncé, considérons $x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$.
On a alors $f(x) = 2x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ donc $f^2(x) = f(2x) = 4x \in [\frac{1}{2}, 1]$ donc $f^3(x) = f(4x) = 2(1-4x) = 2-8x$.
On a alors $f^3(x) = x \Leftrightarrow 2-8x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{9}$ qui est bien dans $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$.
On vérifie qu'on a bien $f(\frac{2}{9}) \neq \frac{2}{9}$ et $f^2(\frac{2}{9}) \neq \frac{2}{9}$. En effet, $f(\frac{2}{9}) = \frac{4}{9}$ et $f^2(\frac{2}{9}) = f(\frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$ puis $f^3(\frac{2}{9}) = f(\frac{8}{9}) = 2(1-\frac{8}{9}) = \frac{2}{9}$ donc $\boxed{\dfrac{2}{9} \text{ est un point 3-périodique pour } f.}$

Partie II : 5-périodicité n'implique pas 3-périodicité

1. Le graphe de f est le suivant :



2. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f^2(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$, $f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$, $f^4(0) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$ et $f^5(0) = f(1) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est un point 5-périodique pour } f.}$

3. • Puisque f est continue et croissante sur $[0, \frac{1}{4}]$, on a $f([0, \frac{1}{4}]) = [f(0), f(\frac{1}{4})] = [\frac{1}{2}, 1]$.
De même, puisque f est continue et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on a $f^2([0, \frac{1}{4}]) = f([\frac{1}{2}, 1]) = [f(1), f(\frac{1}{2}] = [0, \frac{3}{4}]$.
Enfin, on a de même $f^3([0, \frac{1}{4}]) = f([0, \frac{3}{4}]) = f([0, \frac{1}{4}]) \cup f([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]) = [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{1}{4}, 1]$ donc $\boxed{f^3\left(\left[0, \dfrac{1}{4}\right]\right) = \left[\dfrac{1}{4}, 1\right].}$

• Pour les mêmes raisons, on a $f^3([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) = f^2([\frac{3}{4}, 1]) = f([0, \frac{1}{4}]$ d'où $\boxed{f^3\left(\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]\right) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right].}$

• Enfin, $f^3([\frac{3}{4}, 1]) = f^2([0, \frac{1}{4}]) = f([\frac{1}{2}, 1])$ d'où $\boxed{f^3\left(\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]\right) = \left[0, \dfrac{3}{4}\right].}$

• Si $x \in [0, \frac{1}{4}]$ est 3-périodique, on a $f^3(x) = x$. Puisque $f^3([0, \frac{1}{4}] = [\frac{1}{4}, 1]$, la seule possibilité est $x = \dfrac{1}{4}$. Or, $f^3(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4}$ n'est pas un point fixe de f^3, ce qui prouve que f n'admet pas de point 3-périodique sur $[0, \frac{1}{4}]$.
• De même, puisque $f^3([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1]$, si f admettait un point 3-pérodique dans $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, ce point serait nécessairement $\frac{1}{2}$ mais $f^3(\frac{1}{2}) = 1$ donc f n'admet pas de point 3-périodique sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
• Enfin, puisque $f^3([\frac{3}{4}, 1]) = [0, \frac{3}{4}]$, si f admettait un point 3-pérodique dans $[\frac{3}{4}, 1]$, ce point serait nécessairement $\frac{3}{4}$ mais $f^3(\frac{3}{4}) = 0$ donc f n'admet pas de point 3-périodique sur $[\frac{3}{4}, 1]$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'admet aucun point } 3\text{-pérodique dans l'un de ces intervalles.}}$

4. Soient $(x,y) \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]^2$ avec $x < y$.
   Puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, on a

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \leqslant f(y) < f(x) \leqslant \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

   Puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$, on a

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \leqslant f^2(x) < f^2(y) \leqslant \frac{1}{4} = 1.$$

   Enfin, puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{4},1]$, on a $f^3(y) < f^3(x)$.

   Ainsi, si $x < y$, alors $f^3(x) < f^3(x)$, ce qui prouve que $\boxed{f^3 \text{ est strictement décroissante sur } \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}$.

   Puisque $x \mapsto -x$ l'est également, on en déduit que la fonction $g : x \mapsto f^3(x) - x$ est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$.
   De plus, $g(\frac{1}{2}) = f^3(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ et $g(\frac{3}{4}) = f^3(\frac{3}{4}) - \frac{3}{4} = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} < 0$.
   Puisque g est continue sur $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ comme composée d'applications continues et est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f^3(x_0) = x_0$. Ainsi, f^3 admet un unique point fixe sur $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$.
   Or, d'après la question précédente, f^3 n'admet aucun point fixe sur $[0,1] \setminus \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$.

   On en déduit que $\boxed{f^3 \text{ admet un unique point fixe sur } I.}$

5. Puisque $f : I \longrightarrow I$ est continue, on sait d'après la question 1.(a) de la Partie I que f admet au moins un point fixe $x \in I$, i.e. $f(x) = x$. Ce point vérifie alors $f^3(x) = x$ et est donc nécessairement un point fixe de f^3.
   Or, d'après la question précédente, f^3 admet un unique point fixe sur I. Ce point fixe est donc nécessairement x, un point fixe de f, qui est donc 1-périodique. Or, si f admettait un point 3-périodique, f^3 possèderait un autre point fixe, ce qui mettrait en défaut l'unicité prouvée à la question précédente.
   On en conclut que $\boxed{f \text{ n'admet pas de point } 3\text{-périodique.}}$

Partie III : Doublement de période

1. On a $F(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{f(1)}{3}$ et $F(\frac{2}{3}) = 0$. Puisque F est affine sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, on a

$$\boxed{\forall x \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], F(x) = -(2+f(1))\left(x - \frac{2}{3}\right).}$$

   De même, puisque F est affine sur $[\frac{2}{3},1]$, que $F(\frac{2}{3}) = 0$ et que $F(1) = \frac{1}{3}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \left[\frac{2}{3},1\right], F(x) = x - \frac{2}{3}.}$$

2. Puisque $f : [0,1] \to [0,1]$, pour tout $x \in [0,\frac{1}{3}]$, on a $f(3x) \in [0,1]$ donc $\frac{f(3x)}{3} \in [0,\frac{1}{3}]$ puis $F(x) = \frac{2}{3} + \frac{f(3x)}{3} \in [\frac{2}{3},1]$ ce qui prouve que $\boxed{F\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\frac{2}{3},1\right]}$.

Ensuite, puisque F est continue et strictement croissante (par construction) sur $[\frac{2}{3},1]$, on a $F\left([\frac{2}{3},1]\right)=[F(\frac{2}{3}),F(1)]$ d'où $\boxed{F\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right)=\left[0,\frac{1}{3}\right]}$.

3. D'après la question précédente, pour tout $x\in[0,\frac{1}{3}]$, on a $F(x)\in[\frac{2}{3},1]$ donc nécessairement $F(x)\neq x$.
De même, pour tout $x\in[\frac{2}{3},1]$, on a $F(x)\in[0,\frac{1}{3}]$ donc nécessairement $F(x)\neq x$.
Ainsi, si F admet un point fixe sur I, celui-ci se trouve nécessairement dans $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$.
Par construction, puisque $F(\frac{1}{3})\geqslant\frac{2}{3}>0$, que $F(\frac{2}{3})=0$ et que F est affine sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, la fonction F est strictement décroissante sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ et il en est donc de même de $g:x\mapsto F(x)-x$.
On a $g(\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})-\frac{1}{3}\geqslant\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$ et $g(\frac{2}{3})=F(\frac{2}{3})-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}<0$.
Puisque la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel $p\in]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ tel que $g(p)=0$, i.e. $F(p)=p$.

On a donc bien montré que $\boxed{F\text{ admet un unique point fixe }p\text{ sur }I\text{ avec }p\in\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[}$.

4. (a) On a montré en question 1 de cette partie que le cœfficient directeur de F sur le segment $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ est $a=-(2+f(1))$. Puisque $f(1)\geqslant 0$, il est clair que $\boxed{a\leqslant -2.}$

(b) Puisque F est une fonction affine de cœfficient directeur a sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, que $p\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ et qu'on a supposé que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-p|=|F(u_n)-F(p)|=|a(u_n-p)|=|a||u_n-p|.$$

Or, d'après la question précédente, $a\leqslant-2$ donc $|a|\geqslant 2$ et on en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout }n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-p|\geqslant 2|u_n-p|.}$$

(c) L'inégalité précédente permet d'obtenir par une récurrence immédiate que pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_n-p|\geqslant 2^n|u_0-p|$.
Puisque $u_0\neq p$, on a $|u_0-p|>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n|u_0-p|=+\infty$.

Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-p|=+\infty.}$

Or, on a supposé que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ donc par inégalité triangulaire, on a pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_n-p|\leqslant|u_n|+|p|\leqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-p|=+\infty$.

(d) L'hypothèse selon laquelle pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$ étant absurde, on en déduit qu'il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ pour lequel $u_{n_0}\in[0,1]\setminus\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$.
Or, d'après la question 2, on a $F\left([0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]\right)=F([0,\frac{1}{3}])\cup F([\frac{2}{3},1])=[\frac{2}{3},1]\cup[0,\frac{1}{3}]$.
Ainsi, l'ensemble $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ est stable par F donc puisque $u_{n_0}\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$, on en déduit que pour tout $n\geqslant n_0, u_n\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$, i.e. $\boxed{\text{pour tout }n\geqslant n_0, u_n\notin\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[}$.

(e) Supposons par l'absurde que F admet un point périodique $x\in]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ tel que $x\neq p$. Notons $N\in\mathbb{N}^*$ sa période.
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=F(u_n)$.

D'après les questions précédentes, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \notin \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$.

Puisque x est N-péridoque pour $F, F^N(x) = x$, i.e. $u_N(x) = x$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{kN}(x) = x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, ce qui contredit le fait que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \notin \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$.

On en conclut que $\boxed{F \text{ n'admet aucun point périodique dans } \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \text{ mis à part son point fixe } p.}$

5. (a) Puisque $x \in [0, \frac{1}{3}]$, on a par définition $\boxed{F(x) = \frac{2}{3} + \frac{f(3x)}{3}} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

   Ainsi, $\boxed{F^2(x) = F(F(x)) = F(x) - \frac{2}{3} = \frac{f(3x)}{3}} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

   Ensuite, $\boxed{F^3(x) = F\left(\frac{f(3x)}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{f\left(3 \times \frac{f(3x)}{3}\right)}{3} = \frac{2}{3} + \frac{f^2(3x)}{3}} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

   Enfin, $\boxed{F^4(x) = F(F^3(x)) - \frac{2}{3} = \frac{f^2(3x)}{3}.}$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{2k}(x) = \frac{f^k(3x)}{3}$ et que $F^{2k+1}(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^{k+1}(3x)}{3}$.

   •**Initialisation :** Pour $k = 0$, on a $\frac{f^0(3x)}{3} = \frac{3x}{3} = x = F^0(x)$ et $F^1(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^1(3x)}{3}$ donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

   •**Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $F^{2k}(x) = \frac{f^k(3x)}{3}$ et $F^{2k+1}(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^{k+1}(3x)}{3}$.

   Montrons que $F^{2k+2}(x) = \frac{f^{k+1}(3x)}{3}$ et $F^{2k+3}(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^{k+2}(3x)}{3}$.

   Puisque $F^{2k+1}(x) \in [\frac{2}{3}, 1]$, on a $F^{2k+2}(x) = F(F^{2k+1}(x)) = F^{2k+1}(x) - \frac{2}{3} = \frac{f^{k+1}(3x)}{3} \in [0, \frac{1}{3}]$ donc

   $$F^{2k+3}(x) = F(F^{2k+2}(x)) = \frac{2}{3} + \frac{f(3F^{2k+2}(x))}{3} = \frac{2}{3} + \frac{f^{k+2}(3x)}{3},$$

   ce qui prouve la propriété au rang $k + 1$.

   On a donc bien montré par récurrence que

   $$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, F^{2k}(x) = \frac{f^k(3x)}{3} \text{ et } F^{2k+1}(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^{k+1}(3x)}{3}.}$$

   (c) On suppose que $f^n(x) = x$ et que $f^k(x) \neq x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < n$.

   D'après la question précédente, on a $F^{2n}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f^n(x)}{3} = \frac{x}{3}$.

   Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < 2n, F^k\left(\frac{x}{3}\right) \neq \frac{x}{3}$.

   Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.

   • Si k est pair, on a $F^k\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f^{\frac{k}{2}}(x)}{3} \neq \frac{x}{3}$ car $\frac{k}{2} \in [\![1, n-1]\!]$ donc $f^{\frac{k}{2}}(x) \neq x$.

   • Supposons que k est impair. On a alors $F^k\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ et $\frac{x}{3} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ donc on ne peut pas avoir $F^k\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$.

Ceci prouve bien que $\boxed{\dfrac{x}{3} \text{ est } 2n\text{-périodique pour } F.}$

6. (a) Puisque x est un point périodique pour F qui n'est pas un point fixe de F, on sait d'après la question 4.(e) que $x \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Notons N la période de x pour F. Ainsi, on a $F^N(x) = x$.
On sait d'après la question 2 que $F\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ et que $F\left(\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{2k}\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, $F^{2k+1}\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, $F^{2k}\left(\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ et $F^{2k+1}\left(\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$.
Puisque $x \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, pour avoir $F^N(x) = x$, il est donc nécessaire que

$$\boxed{\text{la période } N \text{ de } x \text{ soit paire.}}$$

(b) Comme dit dans la question précédente, $x \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, il n'y a rien à faire.
Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, puisque $F\left(\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, on a $F(x) \in [0, \frac{1}{3}]$.
Ceci justifie que $\boxed{x \text{ ou } F(x) \text{ appartient à } \left[0, \dfrac{1}{3}\right].}$

(c) Puisque $x \in [0, \frac{1}{3}]$ et que x est $2q$-périodique pour F, on a d'après la question 5.(b),

$$x = F^{2q}(x) = \frac{f^q(3x)}{3}$$

d'où $f^q(3x) = 3x$.
S'il existait $k \in [\![1, q-1]\!]$ tel que $f^k(3x) = 3x$, on aurait $F^{2k}(x) = \dfrac{f^k(3x)}{3} = \dfrac{3x}{3} = x$ avec $2k \in [\![2, 2q-2]\!]$, ce qui contredirait le fait que x est $2q$-périodique pour F.
Ainsi, $f^q(3x) = 3x$ et pour tout $k \in [\![1, q-1]\!], f^k(3x) \neq 3x$, ce qui assure que $\boxed{3x \text{ est } q\text{-périodique pour } f.}$

(d) On suppose que $F(x) \in [0, \frac{1}{3}]$, i.e. $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ d'après la question 6.(b).
Puisque $F(x) \in [0, \frac{1}{3}]$, on a

$$x = F^{2q}(x) = F^{2q-1}(F(x)) = \frac{2}{3} + \frac{f^q(3F(x))}{3}$$

d'où $F(x) = x - \frac{2}{3} = \dfrac{f^q(3F(x))}{3}$ ou encore $f^q(3F(x)) = 3F(x)$.
S'il existait $k \in [\![1, q-1]\!]$ tel que $f^k(3F(x)) = 3F(x)$, par le même calcul que ci-dessus, on aurait $F^{2k}(x) = x$ avec $2k \in [\![2, 2q-2]\!]$, ce qui contredirait le fait que x est $2q$-périodique pour F.
Ainsi, $f^q(3F(x)) = 3F(x)$ et pour tout $k \in [\![1, q-1]\!], f^k(3F(x)) \neq 3F(x)$, ce qui assure que $\boxed{3F(x) \text{ est } q\text{-périodique pour } f.}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
• Supposons que f admette un point n-périodique. D'après la question 5.(c), la fonction F admet alors un point $2n$-périodique.

• Supposons que F admette un point $2n$-périodique. D'après la question 4.(e), celui-ci se situe forcément dans $[0, \frac{1}{3}]$ ou dans $[\frac{2}{3}, 1]$ et on a montré en question 6 que dans les deux cas, la fonction f admettait alors un point n-périodique.
On en déduit que

$$\boxed{f \text{ admet un point } n\text{-périodique si et seulement si } F \text{ admet un point } 2n\text{-périodique.}}$$

8. Reprenons la fonction f considérée dans la partie II et considérons sa fonction « double »F.
On a montré en question 2 de la partie II que f admettait un point 5-périodique, ce qui permet d'affirmer d'après la question précédente que F admet un point 10-périodique.
En revanche, toujours d'après la question précédente, si F admettait un point 6-périodique, alors f admettrait un point 3-périodique, ce qui est impossible d'après la question 5 de la partie II.
On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ admet un point } 10\text{-périodique mais aucun point } 6\text{-périodique.}}$

Partie IV : Preuve du théorème

1. (a) On a $K = \{y\} \subset f(J)$. Puisque $y \in f(J)$, il existe $x \in J$ tel que $f(x) = y$.
En considérant le segment réduit à un point $L = \{x\} \subset J$, on a bien $\boxed{f(L) = K.}$

(b) L'ensemble A est non vide (car il contient b) et est minoré par a par définition. En tant qu'ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$, il admet une borne inférieure, notée v.
Montrons que $v \in A$.
Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = v$.
Puisque $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par ailleurs, f est continue sur I donc par caractérisation séquentielle de la continuité, on obtient

$$\beta = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(v),$$

ce qui prouve que $v \in A$.
Ainsi, $v = \inf(A)$ et $v \in A$ donc $\boxed{v = \min(A).}$

(c) L'ensemble B est non vide (car il contient a) et est majoré par v donc il admet une borne supérieure u (et on a nécessairement $u \leqslant v$).
De même qu'en question précédente, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = u$ et on déduit par caractérisation séquentielle de la limite que

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(u)$$

donc $u \in B$.
Finalement, $u = \sup(B)$ et $u \in B$ donc $\boxed{u = \max(B).}$

(d) Posons $L = [u, v] \subset [a, b] \subset J$ et montrons que $f(L) = K = [\alpha, \beta]$.
• Montrons que $K \subset f(L)$.
Soit $y \in K = [\alpha, \beta] = [f(u), f(v)]$.
Puisque f est continue sur l'intervalle $[u, v]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [u, v] = L$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $y \in f(L)$, ce qui prouve l'inclusion $[\alpha, \beta] \subset f(L)$.
• Montrons que $f(L) \subset K = [\alpha, \beta]$.
Soit $x \in L = [u, v]$. Montrons que $f(x) \in [\alpha, \beta]$.

Si on avait $f(x) < \alpha$, on aurait nécessairement $x > u$ et $\alpha \in [f(x), f(v)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $c \in [x, v]$ tel que $f(c) = \alpha$. Or, $c \in]u, v]$, ce qui contredirait la maximalité de u dans B. On a donc nécessairement $f(x) \geqslant \alpha$.

De même, si on avait $f(x) > \beta$, on aurait $x < v$ et $\beta \in [f(u), f(x)]$ donc il existerait $d \in [u, x]$ tel que $f(d) = \beta$ avec $d < v$ et $d \in [a, b]$, ce qui contredirait la minimalité de v dans A. On a donc nécessairement $f(x) \leqslant \beta$.

Ainsi, $f(x) \in [\alpha, \beta]$, ce qui prouve l'inclusion $f(L) \subset K = [\alpha, \beta]$.

On en conclut que $\boxed{f(L) = K \text{ avec } L = [u, v].}$

2. Soit $K = [\alpha, \beta]$.

D'après le théorème des bornes atteintes, puisque f est continue sur le segment K, alors $f(K)$ est un segment, i.e. il existe $(a, b) \in K^2$ tel que $f(K) = [f(a), f(b)]$.

Puisque $K \subset f(K)$, on a $f(a) \leqslant \alpha$ et $f(b) \geqslant \beta$.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est continue sur K comme somme de fonctions continues sur K.

De plus, $g(a) = f(a) - a \leqslant \alpha - a \leqslant 0$ (car $a \in [\alpha, \beta]$) et $g(b) = f(b) - b \geqslant \beta - b \geqslant 0$ (car $b \in [\alpha, \beta]$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x \in K$ tel que $g(x) = 0$, i.e. $f(x) = x$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ admet un point fixe dans } K.}$

3. Par hypothèse, on a $I_n \subset f(I_{n-1})$, où I_n et I_{n-1} sont des segments non vides inclus dans I.

D'après la question 1, on en déduit qu'il existe un segment non vide J_{n-1} inclus dans I_{n-1} tel que $f(J_{n-1}) = I_n$.

De même, $J_{n-1} \subset I_{n-1} \subset f(I_{n-2})$ donc il existe un segment $J_{n-2} \subset I_{n-2}$ tel que $f(J_{n-2}) = J_{n-1}$.

En réitérant ce raisonnement, on obtient des segments non vides $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ tels que

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], J_k \subset I_k, \forall k \in [\![0, n-2]\!], f(J_k) = J_{k+1} \text{ et } f(J_{n-1}) = I_n.}$$

Si $x_0 = f^0(x_0) \in J_0$, alors $f(x_0) \in f(J_0) = J_1$, puis $f^2(x_0) \in f^(J_1) = J_2$ et on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!], f^k(x_0) \in J_k.}$

4. Puisque x est 3-périodique pour f, $x, f(x)$ et $f^2(x)$ sont également 3-périodiques (et sont deux à deux distincts).

• Supposons que $x_0 < x_1 = f(x_0) < x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$. Alors $f(x_2) = f^3(x_0) = x_0$.

Notons $S_1 = [x_1, x_2]$ et $S_2 = [x_0, x_1]$. Puisque $x_0 < x_1 < x_2$, notons que $S_1 \cap S_2 = \{x_1\}$, qui est un point 3-périodique pour f.

Puisque S_1 est un segment et que f est continue sur S_1, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que $f(S_1)$ est un segment. Par ailleurs, $f(S_1)$ contient $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_0$ donc $[x_0, x_2] \subset f(S_1)$.

En particulier, $S_2 = [x_0, x_1] \subset [x_0, x_2] \subset f(S_1)$ donc $\boxed{S_1 \to S_2}$ et $S_1 = [x_1, x_2] \subset f(S_1)$ donc $\boxed{S_1 \to S_1.}$

De même, $f(S_2)$ est un segment qui contient $f(x_0) = x_1$ et $f(x_1) = x_2$ donc $S_1 = [x_1, x_2] \subset f(S_2)$, i.e. $\boxed{S_2 \to S_1.}$

On a donc bien $\boxed{S_1 \to S_1 \text{ et } S_1 \to S_2 \to S_1.}$

• Supposons que $x_0 < x_2 = f(x_1) < x_1 = f(x_0)$.

Posons $S_1 = [x_0, x_2]$ et $S_2 = [x_2, x_1]$. Notons que $S_1 \cap S_2 = \{x_2\}$, qui est un point 3-périodique pour f.

Pour les mêmes raisons que précédemment, le segment $f(S_1)$ contient $f(x_0) = x_1$ et $f(x_2) = x_0$ donc $[x_0, x_1] \subset f(S_1)$. En particulier $S_1 = [x_0, x_2] \subset f(S_1)$, i.e. $\boxed{S_1 \to S_1}$ et $S_2 = [x_2, x_1] \subset f(S_1)$ donc $\boxed{S_1 \to S_2.}$

De même, le segment $f(S_2)$ contient $f(x_2) = x_0$ et $f(x_1) = x_2$ donc $S_1 = [x_0, x_2] \subset f(S_2)$, i.e. $\boxed{S_2 \to S_1.}$

On retrouve encore $\boxed{S_1 \to S_1 \,\text{et}\, S_1 \to S_2 \to S_1.}$

• Considérons alors deux segments S_1 et S_2 inclus dans I ayant un seul point commun (nécessairement 3-périodique pour f) tels que $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$.

Puisque $S_1 \subset f(S_1)$ et que f est continue sur le segment S_1, on déduit de la question 2 que f admet un point fixe dans S_1.

Par ailleurs, puisque $S_1 \to S_2 \to S_1$, on sait d'après la question précédente qu'il existe deux segments non vides J_0 et J_1 tels que

$$J_0 \subset S_1, J_1 \subset S_2, f(J_0) = J_1 \,\text{et}\, f(J_1) = S_1.$$

Ainsi, $J_0 \subset S_1 = f^2(J_0)$. D'après la question 2, on en déduit que f^2 admet un point fixe $\alpha \in J_0 \subset S_1$.

Si on avait $f(\alpha) = \alpha$, on aurait $\alpha \in f(J_0) = J_1 \subset S_2$ donc $\alpha \in S_1 \cap S_2$. Or, l'unique point dans $S_1 \cap S_2$ est 3-périodique pour f donc ce ne peut être α (puisque $f^2(\alpha) = \alpha$).

Ainsi, on a $f^2(\alpha) = \alpha$ et $f(\alpha) \neq \alpha$, i.e. α est 2-périodique pour f.

On en déduit que $\boxed{f \,\text{admet un point fixe et un point}\, 2\,\text{-périodique.}}$

5. On sait d'après la question précédente que f admet des points n-périodiques pour $n \in [\![1, 3]\!]$.

Soit $n \geqslant 4$ fixé.

En échangeant les rôles de S_1 et S_2 par rapport à la question précédente, on a $S_2 \to S_2$ et $S_2 \to S_1 \to S_2$.

Ainsi, on peut obtenir une suite $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$ avec $n - 1$ flèches.

En utilisant de nouveau la question 3, on montre qu'il existe des segments non vides $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ tels que $J_0 \subset S_1$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], J_k \subset S_2$, pour tout $k \in [\![0, n-2]\!], f(J_k) = J_{k+1}$ et $f(J_{n-1}) = S_1$.

Comme en question précédente, on a $J_0 \subset S_1 = f^n(J_0)$ donc d'après la question 2, f^n admet un point fixe α dans $J_0 \subset S_1$.

S'il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $f^p(\alpha) = \alpha$, on aurait $\alpha \in f^p(J_0) = J_p \subset S_2$ donc $\alpha \in S_1 \cap S_2$.

Avec les notations de la question précédente, on a alors $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$.

Ainsi, $f(\alpha), f^2(\alpha)$ et $f^3(\alpha)$ prennent (dans un certain ordre) les trois valeurs différentes x_0, x_1 et x_2.

Or, puisque $n \geqslant 4, n - 1 \geqslant 3$ et pour tout $p \in [\![1, n-1]\!], f^p(\alpha) \in S_2$, ce qui est contradictoire puisqu'on ne peut avoir x_0, x_1 et x_2 dans S_2.

Ainsi, on a bien $f^n(\alpha) = \alpha$ et pour tout $p \in [\![1, n-1]\!], f^p(\alpha) \neq \alpha$ donc α est n-périodique pour f.

On en conclut que $\boxed{f \,\text{admet un point}\, n\,\text{-périodique pour tout}\, n \geqslant 1.}$