Devoir maison n°10
A rendre pour le Lundi 2 Février 2026

Problème 1 : Théorème de Darboux

Le but de ce problème est de montrer le théorème de Darboux : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (même si elle n'est pas continue sur I), à savoir : pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$ pour tout y entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$.
Soient $(a,b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$. Soit y entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
On considère les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \varphi :]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi : [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}.$$

1. (a) Montrer que les fonctions φ et ψ peuvent être prolongées par continuité sur $[a,b]$. On note $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ leurs prolongements respectifs.
   (b) Montrer que $\tilde{\varphi}([a,b])$ et $\tilde{\psi}([a,b])$ sont des intervalles non disjoints, i.e.
   $$\tilde{\varphi}([a,b]) \cap \tilde{\psi}([a,b]) \neq \emptyset.$$
   (c) En déduire que $\tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$ est un intervalle (on pourra montrer au préalable que l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle).
2. Montrer que $y \in \tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$.
3. On suppose dans cette question que $y \in \tilde{\varphi}([a,b])$.
   (a) Montrer que si $y = \tilde{\varphi}(a)$, alors $y = f'(a)$.
   (b) Justifier que si $y \in \tilde{\varphi}(]a,b])$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f'(c)$.
4. On suppose dans cette question que $y \in \tilde{\psi}([a,b])$.
   (a) Montrer que si $y = \tilde{\psi}(b)$, alors $y = f'(b)$.
   (b) Justifier que si $y \in \tilde{\psi}([a,b[)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f'(c)$.
5. Conclure.

Problème 2 : Méthode de Newton

L'objectif de ce problème est de montrer la convergence de la méthode de Newton, dont le but est d'approcher l'unique point d'annulation d'une fonction dans un intervalle donné.
Autrement dit, si f est définie sur un intervalle I sur lequel la fonction f s'annule en un unique point c, on cherche à construire une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$.

Partie I : Formules de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Soit $x_0 \in [a,b]$ un réel fixé.
Dans toute cette partie, on considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. On rappelle que pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de f.

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$.
2. En déduire que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \quad \textbf{(Formule de Taylor avec reste intégral)}$$

   Indication : on pourra procéder par récurrence sur l'entier naturel n.
3. Justifier qu'il existe un réel positif M tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$.
4. En déduire que

$$\forall x \in [a,b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textbf{(Inégalité de Taylor-Lagrange)}$$

Partie II : Principe de la méthode

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Dans toute cette partie, on considère une fonction $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$ telle que f' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1. Montrer que la fonction f s'annule au plus une fois sur $]a,b[$.
2. Soit $t \in]a,b[$. Montrer que la tangente à la courbe de f au point $(t, f(t))$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

Dans toute la suite, on suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ (a fortiori unique) tel que $f(c) = 0$.
Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c-r, c+r]$.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} c_0 \in]a,b[\\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n - \dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

Autrement dit, la méthode consiste à tracer la tangente à la courbe de f au point $(c_0, f(c_0))$, à trouver le réel c_1 en lequel la tangente coupe cet axe, puis à itérer ce procédé en étudiant ensuite l'intersection de la tangente à la courbe de f au point $(c_1, f(c_1))$ avec l'axe des abscisses et ainsi de suite.
Nous allons montrer que la suite ainsi obtenue approche le point d'annulation de f.

3. (a) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset]a,b[$.

(b) Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset]a, b[$. Justifier que $s_r = \max_{x \in J_r} |f''(x)|$ et $i_r = \min_{x \in J_r} |f'(x)|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \dfrac{s_r}{2i_r}$.

(c) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.
On pourra commencer par montrer que si $r_0 > 0$ est tel que $J_{r_0} \subset]a, b[$, alors pour tout $r \in]0, r_0]$, $K_r \leqslant K_{r_0}$.

On fixe dorénavant un réel $r > 0$ tel que $J_r \subset]a, b[$ et $0 \leqslant rK_r < 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \in J_r$.
   (a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que
$$|f(c) - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n)| \leqslant \frac{s_r |c - c_n|^2}{2}.$$
   (b) En déduire que $|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2$, puis que $c_{n+1} \in J_r$.
5. Montrer que si $c_0 \in J_r$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r$ et en déduire que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

   On fixe dorénavant un réel $c_0 \in J_r$, de telle sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et en conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = c$.