CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°9

Exercice 1 : Un système différentiel

1. On a pour tout réel t

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -3x_1(t)+8x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t)+5x_2(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.}$

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$A-\lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \det(A-\lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 8 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

d'où $(-3-\lambda)(5-\lambda)+16 = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1.}$

(b) Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$AU = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a+8b & = & a \\ -2a+5b & = & b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4a+8b & = & 0 \\ -2a+4b & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $a = 2b$. Finalement, les matrices $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AU = U$ sont

$$\boxed{\left\{U = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\right\}}.$$

3. On a $\det(P) = -1$. Puisque $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.}$

4. On calcule :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{P^{-1}AP = T.}$

5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t)-2x_2(t) \end{pmatrix}$ d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & x_2(t) \\ y_2(t) & = & x_1(t)-2x_2(t) \end{array}\right. .$$

On a alors

$$P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ x_1'(t)-2x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = Y'(t).$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}X'(t).}$
On a montré que $P^{-1}AP = T$ donc $P^{-1}A = TP^{-1}$. Ainsi, pour tout réel t,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = TP^{-1}X(t) = TY(t).$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t).}$

(b) L'égalité matricielle montrée à la question précédente s'écrit sous la forme d'un système : pour tout réel $t, Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_2(t) \end{array} \right. .$$

Les solutions de la deuxième équation sont les fonctions

$$\boxed{\left\{ y_2 : t \mapsto \mu e^t, \mu \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(c) En injectant dans la première équation, on trouve pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(E) : y_1'(t) - y_1(t) = -2y_2(t) = -2\mu e^t.$$

On résout d'abord l'équation homogène $(H) : y_1'(t) - y_1(t) = 0$ dont les solutions sont les fonctions $y_1 : t \mapsto \lambda e^t$, où λ est une constante réelle.
On résout ensuite (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.
Soit y_1 définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $y_1(t) = \lambda(t)e^t$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_1'(t) - y_1(t) = 2\mu e^t \quad & \Leftrightarrow \quad (\lambda'(t) + \lambda(t))e^t - \lambda(t)e^t = -2\mu e^t \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = -2\mu \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda(t) = -2\mu t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \quad y_1(t) = \lambda e^t - 2\mu t e^t. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\boxed{\left\{ y_1 : t \longmapsto \lambda e^t - 2\mu t e^t, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^t - 2\mu t e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t - 2\mu t e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu t e^t \\ \lambda e^t - 2\mu t e^t \end{pmatrix},$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Il existe donc bien deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout réel t,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu t e^t \\ x_2(t) & = & \lambda e^t - 2\mu t e^t \end{array} \right. , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(0) & = & 1 \\ x_2(0) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} 2\lambda+\mu & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} \mu & = & -1 \\ \lambda & = & 1 \end{array}\right.$$

L'unique couple de solutions (x_1, x_2) vérifiant $x_1(0) = x_2(0) = 1$ est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & e^t + 4te^t \\ x_2(t) & = & e^t + 2te^t \end{array}\right., \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 2 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $AX = \lambda X$ admette une solution non nulle. Cette équation équivaut à $(A - \lambda I_3)X = 0$. Or, pour tout réel λ, cette équation admet la solution nulle et celle-ci est unique si et seulement si $A - \lambda I_3$ est inversible.
   On cherche donc à déterminer les réels λ pour lesquels $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire les réels λ pour lesquels $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $A - \lambda I_3$.

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2+2\lambda+1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} \overset{2L_3 + (2-\lambda)L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2+2\lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$$

   Or, $(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$ donc on a les équivalences

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1, 2\}.$$

   $\boxed{\text{Les réels cherchés sont donc } 1, -1, \text{ et } 2.}$

2. (a) On a les équivalences suivantes :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & x \\ z & = & y \\ -2x+y+2z & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z$$

   donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$

   (b) On a les équivalences suivantes :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -x \\ z & = & -y \\ -2x+y+2z & = & -z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -x \\ z & = & x \end{array}\right.$$

   donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$

(c) On a les équivalences suivantes :

$$AX=2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ z & = & 2y \\ -2x+y+2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ z & = & 4x \end{array} \right.$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX=X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$

3. (a) Echelonnons P en utilisant la méthode du pivot de Gauss afin de déterminer l'inverse de P si P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

On voit dès la deuxième étape que P est de rang 3, donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.}$

(c) Puisque D est une matrice diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = D^n$.
• Pour $n = 0$, on a $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3 = D^0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P^{-1}A^nP = D^n$. D'après la question 2.(b), $P^{-1}AP = D$ donc

$$D^{n+1} = D^nD = (P^{-1}A^nP)P^{-1}AP = P^{-1}A^n(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^{n+1}P,$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
On a donc bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = D^n.}$

(e) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix}}$.

Partie II : Etude de la suite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.
• Pour $n = 0$, on a $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $X_n = A^nX_0$. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0,$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.
On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0.}$

3. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente et le résultat de la première partie, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n + 2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1} + 2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n + 2^{n+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, en considérant la première ligne de la matrice obtenue,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = -6 + 2(2^n + (-1)^{n+1}).}$$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant -6 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 8$.
Or, puisque $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} - 8 = +\infty$.
Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$