Corrigé de la liste d'exercices n°15 — Dérivabilité

Exercice 1.

1. On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Puisque f est dérivable en a, on sait que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.
Posons $H = h^2$. On a $H \to 0$ lorsque $h \to 0$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} = \lim_{H\to 0} \frac{f(a+H)-f(a)}{H} = f'(a)$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = 0\times f'(a) - f'(a) = -f'(a).$$

2. On a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a)-f(a)g'(a).$$

Exercice 2.
Soit $f : x \longmapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
A priori, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais elle est prolongeable par continuité en 0. En effet, puisque la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Par ailleurs, par imparité de la fonction arctan, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.
Etudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en calculant ses dérivées successives.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x^2} - 1.$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc $f'(0) = 0$.
On dérive à nouveau f' : pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

et
$$f''(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} = \pi$$
car $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
Enfin, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= -\frac{2}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{(4+6x^2)(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2)(4x+2x^3)}{(1+x^2)^4} \\
&= -\frac{2}{1+x^2} - \frac{(4+6x^2)(1+x^2) - 4x(4x+2x^3)}{(1+x^2)^3} \\
&= -\frac{2(1+x^2)^2 + 6x^4 + 10x^2 + 4 - 16x^2 - 8x^4}{(1+x^2)^3} \\
&= -\frac{2 + 4x^2 + 2x^4 - 2x^4 - 6x^2 + 4}{(1+x^2)^3} \\
&= -\frac{-2x^2 + 6}{(1+x^2)^3} \\
&= 2\frac{x^2 - 3}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $x \geqslant \sqrt{3}$, $f^{(3)}(x) \geqslant 0$ et pour tout $x \in]0, \sqrt{3}]$, $f^{(3}(x) \leqslant 0$ donc la fonction f'' est strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, \sqrt{3}]$.
La fonction f'' admet donc un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et celui-ci vaut
$$f''(\sqrt{3}) = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}^3}{16} = \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{8} < 0.$$
Puisque $f''(0) = \pi > 0$, comme f'' est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $[0, \sqrt{3}]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]0, \sqrt{3}[$ tel que $f''(\alpha) = 0$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$ donc pour tout $x \in [\sqrt{3}, +\infty[$, $f''(x) < 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0, \alpha[$, $f''(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.
On sait que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où $2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2$, i.e.
$$\lim_{x\to+\infty} 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 2.$$
Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x^2} - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$. Puisque f' est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ avec $f'(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, alors pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $x^2\arctan(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2\frac{1}{x} = x$.
Par imparité de f, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3.

1. Soit $f : x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Calculons les limites de f.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(2x) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\pi$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$.
Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\pi, \pi[$.
2. Puisque f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi,\pi[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = \frac{\pi}{4}$ donc l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Soit x la solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a alors
$$\tan(\arctan(2x)+\arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{1-2x^2} = 1,$$
ce qui implique que $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Les racines de ce trinôme du second degré sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} > 0$.
Or, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$ donc l'unique antécédent de $\frac{\pi}{4}$ par la fonction f est nécessairement strictement positif.
On en déduit que l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

Exercice 4.

1. Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos' = -\sin, \cos^{(2)} = -\cos, \cos^{(3)} = \sin, \cos^{(4)} = \cos$.
On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, cos est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et pour tout $n \in \mathbb{N}, \cos^{(4n)} = \cos, \cos^{(4n+1)} = -\sin, \cos^{(4n+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4n+3)} = \sin$.
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$.
• **Initialisation :** pour $n = 0$, on a bien f de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et pour tou $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{0!}{(2-x)^{0+1}}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$.
Posons $u(x) = 2 - x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{u^{n+1}(x)}$. Puisque u est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{(n+1)n!u'(x)}{u^{n+2}(x)} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

Exercice 5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Montrons que f est dérivable en 0. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Or, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$, d'où $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
On a donc montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il reste à établir que f' est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à vérifier la continuité de f' en 0.
On a déjà montré que $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ et on a $\lim_{x \to 0} 2e^{x^2} = 2$ donc

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 2 - 1 = 1 = f'(0),$$

ce qui prouve que f' est continue en 0, et finalement f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.
On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **•Initialisation :**
   Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u_0 + v_0 \ln(x)}{x^{0+1}}$ avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   •Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$.
   Montrons la propriété au rang $n+1$, c'est à dire montrons qu'il existe deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln(x)}{x^{n+2}}$.

En dérivant $f^{(n)}$, on a pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{v_n}{x} \times x^{n+1} - (n+1)x^n(u_n + v_n \ln(x))}{(x^{n+1})^2} = \frac{v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln(x)}{x^{n+2}}.$$

Posons $u_{n+1} = v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$ et on a bien $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{u_{n+1} + v_{n+1}\ln(x)}{x^{n+2}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}$.

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ (ceci se montre par une récurrence immédiate).

   Par ailleurs, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

   D'après la formule de Leibniz, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(x) \times g(x), f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \ln(x) g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n-1} n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = (-1)^n n!$.

Exercice 7.

1. $t \mapsto \dfrac{(2t+1)^8}{16}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $u \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(|u|)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. $x \mapsto e^{\sin(x)}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ définie et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. $u \mapsto \ln(\ln(u))$ définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8. Puisque $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} > 0$, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\alpha]$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in]a, a+\alpha]$, $f(x) - f(a) > 0$ (car $x - a > 0$).

En particulier, $f(a+\alpha) > f(a) = 0$.
De même, puisque $f'(b) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$, on sait qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in [b-\beta, b[$, $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in [b-\beta, b[, f(x) - f(b) < 0$ (car $x - b < 0$).
En particulier, $f(b-\beta) < f(b) = 0$.
Puisque f est continue (car dérivable) sur $[a,b]$, que $f(a+\alpha) > 0$ et $f(b-\beta) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c_2 entre $a+\alpha$ et $b-\beta$, donc $c_2 \in]a,b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
Puisque f est continue sur $[a, c_2]$, dérivable sur $]a, c_2[$, telle que $f(a) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_1 \in]a, c_2[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
De même, puisque f est continue sur $[c_2, b]$, dérivable sur $]c_2, b[$, telle que $f(b) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_3 \in]c_2, b[$ tel que $f'(c_2) = 0$.
On a donc bien $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tel que $f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 9.

1. Posons pour tout $x \in [a,b], h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$.
   La fonction h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f et g le sont.
   De plus, on a $h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.
   Or, $h'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a))$ donc
   $$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$
2. (a) Montrons que pour tout $x \in]a,b], g(x) \neq 0$.
   S'il existait $x \in]a,b]$ tel que $g(x) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existerait $c \in]a,x[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui est absurde.
   Donc pour tout $x \in]a,b], g(x) \neq 0$.

   (b) Soit $x \in]a,b]$. D'après la question précédende, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que
   $$g'(c_x)(f(x) - f(a)) = f'(c_x)(g(x) - g(a)),$$
   d'où $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ puisque $f(a) = g(a) = 0$.
   Or, puisque pour tout $x \in]a,b], a < c_x < x$, on a d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$. Par ailleurs, on sait que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, donc par composition de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$, d'où $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exercice 10. Posons $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$. Puisque f est deux fois dérivable sur $[a,b]$, on en déduit que g est dérivable sur $[a,b]$ donc continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Par ailleurs, $g(a) = e^a(f'(a) - f(a)) = 0$ et $g(b) = e^b(f'(b) - f(b)) = 0$.
D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or, $g'(c) = e^c(f'(c) - f(c) + f''(c) - f'(c)) = e^c(f''(c) - f(c)) = 0$. Puisque $e^c \neq 0$, ceci implique que $f''(c) - f(c) = 0$, d'où $f(c) = f''(c)$.

Exercice 11. Posons pour tout $x \in [a,b], g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, ce qui est légitime car $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f et $x \mapsto x$ le sont.
Par ailleurs, $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or, $g'(c) = \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$ donc $cf'(c) - f(c) = 0$, i.e. $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$, car $c \neq 0$.

Exercice 12. Soient l et l' deux réels tels que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l'$.
Supposons par l'absurde que $l' \neq 0$. Dans un premier temps, on suppose $l' > 0$.
Puisque $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l' > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A, f'(x) > \frac{l'}{2}$.
Soit $x > A$. Puisque f est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A) > \dfrac{l'}{2}(x - A)$.
Ainsi, pour tout $x > A, f(x) > f(A) + \dfrac{l'}{2}(x - A)$. Puisque $l' > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(A) + \dfrac{l'}{2}(x - A) = +\infty$, donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.
De même, si $l' < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} -f'(x) = -l' > 0$ donc d'après ce qui précède, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} -f(x) = +\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est de nouveau absurde.
Il est donc absurde de supposer $l' \neq 0$.
On a donc nécessairement $l' = 0$, i.e. $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
Autre méthode (due à Rose) :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur $[x, x + 1]$, il existe $c_x \in]x, x + 1[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x + 1) - f(x)}{x + 1 - x} = f(x + 1) - f(x)$.
On a d'une part, $\lim_{x\to+\infty} f(x + 1) - f(x) = l - l = 0$.
D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} c_x = +\infty$ (car $c_x > x$), donc par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = l'$.
Par unicité de la limite, $l' = 0$.

Exercice 13. Posons pour tout $x \in [a, b], g(x) = f(c)(x - a)(x - b) - (c - a)(c - b)f(x)$.
Puisque $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, on a également $g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.
On a $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, on en déduit qu'il existe $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.
Puisque g' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$, on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle sur $[\alpha, \beta]$ et on en déduit qu'il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.
Or, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g'(x) = f(c)(2x - (a + b)) - (c - a)(c - b)f'(x) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2f(c) - (c - a)(c - b)f''(x)$$

donc

$$g''(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(c) = \frac{(c - a)(c - b)}{2} f''(\gamma).$$

Exercice 14.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\dfrac{2}{5}x$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	$+\infty$

La fonction f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ donc

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] \subset [0, 1].$$

(b) On a

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{5}(4-x^2)=x \Leftrightarrow x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5-\sqrt{41}}{2} \text{ ou } x=\frac{-5+\sqrt{41}}{2}.$$

(c) On a pour tout $x\in[0,1], |f'(x)|=\left|-\frac{2}{5}x\right|=\frac{2}{5}|x|\leqslant\frac{2}{5}$.

2. (a) $l=\dfrac{\sqrt{41}-5}{2}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$. **•Initialisation :** $u_0\in[0,1]$.

•Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u_n\in[0,1]$.

On a $u_{n+1}=f(u_n)\in f([0,1])\subset[0,1]$ donc $u_{n+1}\in[0,1]$ ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $|u_{n+1}-l|=|f(u_n)-f(l)|$.

Puisque $u_n\in[0,1]$ et $l\in[0,1]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]0,1[$ tel que $f(u_n)-f(l)=f'(c)(u_n-l)$ i.e. $|u_{n+1}-l|=|f'(c)||u_n-l|$.

Or, puisque $c\in]0,1[$, on a $|f'(c)|\leqslant\frac{2}{5}$, d'où $|u_{n+1}-l|\leqslant\frac{2}{5}|u_n-l|$, et ce pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_n-l|\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n=0$, puisque $u_0\in[0,1]$ et que $l\in[0,1]$, $|u_0-l|\leqslant 1=\left(\frac{2}{5}\right)^0$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $|u_n-l|\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

D'après la question précédente, $|u_{n+1}-l|\leqslant\frac{2}{5}|u_n-l|\leqslant\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(e) Pour tout $n\in\mathbb{N}, 0\leqslant|u_n-l|\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{2}{5}\right|<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-l|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

(f) D'après la question d, il suffit que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n\leqslant 10^{-10}\Leftrightarrow e^{n\ln\left(\frac{2}{5}\right)}\leqslant 10^{-10}\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{5}\right)\leqslant -10\ln(10)\Leftrightarrow n\geqslant-\frac{10\ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

car $\ln\left(\frac{2}{5}\right)<0$.

Puisque $-\dfrac{10\ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}\simeq 25,12$, le n_0 cherché est $n_0=26$.

Sinon, on peut aussi utiliser le script suivant en `Python` :

```
n=0
while (2/5)**n>10**(-10):
    n+=1
print(n)
```

Exercice 15.

1. (a) Puisque $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, on sait que f admet un point fixe l sur $[a, b]$. Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
   Puisque f est k-lipschitzienne, on a $|u_1 - l| = |f(u_0) - f(l)| \leqslant k|u_0 - l|$, puis $|u_2 - l| = |f(u_1) - f(l)| \leqslant k|u_1 - l| \leqslant k^2|u_0 - l|$.
   Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant k^n|u_0 - l|$.
   Puisque $0 \leqslant k < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$, donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

   (b) Si f admettait un autre point fixe l', la même preuve que celle en question précédente montrerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$ d'où $l = l'$ par unicité de la limite, ce qui prouve l'unicité du point fixe de f.

2. D'après la question 1, f^p admet un unique point fixe dans $[a, b]$. Notons-le l. Ainsi $f^p(l) = l$.
   Montrons que l est un point fixe de f.
   On a $f^p(f(l)) = f^{p+1}(l) = f(f^p(l)) = f(l)$ donc $f(l)$ est un point fixe de f^p. Or, le seul point fixe de f^p est l, donc $f(l) = l$, ce qui prouve que l est un point fixe de f.
   Par ailleurs, si f admettait un autre point fixe l', on aurait $f^p(l') = l'$ donc par unicité du point fixe de f, on aurait $l = l'$, ce qui prouve l'unicité du point fixe de f.

Exercice 16. Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

• Supposons que $f(a) < f(b)$. D'après l'inégalité des trois pentes, on a pour tout $x > b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

d'où $f(x) \geqslant (x - b)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(b)$.

Puisque $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - b)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(b) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par comparaison, ce qui est absurde puisque f est majorée.

• Supposons que $f(a) > f(b)$. D'après l'inégalité des trois pentes, on a pour tout $x < a$,

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d'où $f(x) \geqslant (a - x)\dfrac{f(a) - f(b)}{b - a} + f(a)$.

Puisque $\dfrac{f(a) - f(b)}{b - a} > 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (a - x)\dfrac{f(a) - f(b)}{b - a} + f(a) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par comparaison, ce qui est absurde puisque f est majorée.

On en conclut que f est nécessairement constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17.

1. Puisque f est convexe sur $\mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = l$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(0)}{x} = 0$, on en déduit par somme de limites que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(0)}{x} = l.$$

2. Soit $g : x \mapsto f(x) - lx$. La fonction g est convexe sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions convexes.

   Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} - l = 0$.

   Montrons que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $a < b$.

   Puisque g est convexe sur $\mathbb{R}_+$, alors la fonction $h : x \mapsto \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ est croissante.

   Or, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Puisqu'elle est croissante, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}, h(x) \leqslant 0$.

   En particulier, $h(b) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \leqslant 0$. Puisque $a < b$, on en déduit que $g(b) \leqslant g(a)$, ce qui prouve que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - lx$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.