Corrigé du devoir maison n°10

Théorème de Darboux

Dans tout l'exercice, on suppose $a < b$.

1. (a) Par définition,

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

et

$$\lim_{x\to b} \psi(x) = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b).$$

On peut donc prolonger φ et ψ par continuité en posant

$$\boxed{\tilde{\varphi} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b. \end{cases} \end{array}}$$

(b) Les fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\tilde{\varphi}([a, b])$ et $\tilde{\psi}([a, b])$ sont également des intervalles.
De plus, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tilde{\varphi}(b) = \tilde{\psi}(a)$ donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \tilde{\varphi}([a, b]) \cap \tilde{\psi}([a, b])$.
On a donc bien prouvé que $\boxed{\tilde{\varphi}([a, b]) \text{ et } \tilde{\psi}([a, b]) \text{ sont des intervalles non disjoints.}}$

(c) Montrons de façon générale que si A et B sont des intervalles tels que $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est un intervalle.
Soient $(x, y) \in (A \cup B)^2$, avec $x \leqslant y$. Montrons que $[x, y] \subset A \cup B$.
• Si x et y appartiennent à A, puisque A est un intervalle, alors $[x, y] \subset A \subset A \cup B$.
On raisonne de même si x et y appartiennent tous deux à B.
• Supposons que $x \in A \setminus B$ et $y \in B \setminus A$. Par hypothèse, on a $x \leqslant y$ avec $x \in A$ et $y \notin A$ donc A est un intervalle majoré et on a $y \geqslant \sup(A)$.
De même, puisque $y \in B$ et $x \notin B$, B est un intervalle minoré et on a $x \leqslant \inf(B)$.
Or, puisque $A \cap B \neq \emptyset$, il existe un élément $z \in A \cap B$.
Puisque $z \in B$, alors $z \geqslant \inf(B) \geqslant x$. Par ailleurs, $z \in A$ donc A étant un intervalle, $[x, z] \subset A$.
De même, puisque $z \in A$, $z \leqslant \sup(A) \leqslant y$ et puisque $z \in B$, B étant un intervalle, $[z, y] \subset B$.
Ainsi, $[x, y] = [x, z] \cup [z, y] \subset A \cup B$.
• Si $x \in B \setminus A$ et $y \in A \setminus B$, on fait un raisonnement analogue au précédent.
Dans tous les cas, $[x, y] \subset A \cup B$.
Ainsi, l'union de deux intervalles non disjoints est encore un intervalle.
Puisque $\tilde{\varphi}([a, b])$ et $\tilde{\psi}([a, b])$ sont des intervalles non disjoints d'après la question précédente, $\boxed{\text{on en déduit que } \tilde{\varphi}([a, b]) \cup \tilde{\psi}([a, b]) \text{ est un invervalle.}}$

2. D'après la question précédente, $\tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$ est un intervalle.
Or, $f'(a) = \tilde{\varphi}(a) \in \tilde{\varphi}([a,b]) \subset \tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$ et $f'(b) = \tilde{\psi}(b) \in \tilde{\psi}([a,b]) \subset \tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$.
Ainsi, puisque y est entre $f'(a)$ et $f'(b)$, qui appartiennent eux-mêmes à l'intervalle $\tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b])$, on en déduit que $\boxed{y \in \tilde{\varphi}([a,b]) \cup \tilde{\psi}([a,b]).}$

3. (a) Puisque $\tilde{\varphi(a)} = f'(a)$, $\boxed{\text{si}\, y = \tilde{\varphi}(a), \text{ alors}\, y = f'(a).}$

   (b) Supposons que $y \in \tilde{\varphi}(]a,b])$.
   Alors il existe $x \in]a,b]$ tel que $y = \tilde{\varphi}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
   Or, puisque f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$, on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]a,x[\subset]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$.

   $\boxed{\text{Ainsi, il existe}\, c \in]a,b[\text{ tel que}\, y = f'(c).}$

4. (a) Puisque $\tilde{\psi(b)} = f'(b)$, $\boxed{\text{si}\, y = \tilde{\psi}(b), \text{ alors}\, y = f'(b).}$

   (b) Supposons que $y \in \tilde{\psi}([a,b[)$.
   Alors il existe $x \in [a,b[$ tel que $y = \tilde{\psi}(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$.
   Or, puisque f est continue sur $[x,b]$ et dérivable sur $]x,b[$, on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]x,b[\subset]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c)$.

   $\boxed{\text{Ainsi, il existe}\, c \in]a,b[\text{ tel que}\, y = f'(c).}$

5. On a montré qu'il y avait trois possibilités : soit $y = f'(a)$, soit $y = f'(b)$, soit il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f'(c)$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, il existe}\, c \in [a,b] \text{ tel que}\, y = f'(c).}$$

Problème 2 : Méthode de Newton

Partie I : Formules de Taylor

1. Puisque $n + 1 \geqslant 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc la fonction f' est continue sur $[a,b]$ et on a pour tout $x \in [a,b], f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + [f(t)]_{x_0}^{x} = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$ donc $\boxed{\forall x \in [a,b], f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt.}$

2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:« si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b], f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt$ ».

   •Initialisation :
   Pour $n = 0$, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et d'après la question précédente, on a pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(0+1)}(t)}{0!}(x - t)^0 dt$$

   donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a,b]$. A fortiori f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a,b]$, alors $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
On peut donc réaliser une intégration par parties en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t), u'(t) = f^{(n+2)}(t), v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}, v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ donc on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On a donc bien montré que, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{\forall x \in [a,b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.}$$

3. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée.
   On en déduit qu'il existe un réel M positif tel que $\boxed{\forall t \in [a,b], |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M.}$
4. Soit $x \in [a,b]$. D'après la question 2, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right|.$$

• Si $x \geqslant x_0$, on a

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt = \frac{M}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x}$$

d'où $\left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

• Si $x \leqslant x_0$, on a

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_{x}^{x_0} \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!} \int_{x}^{x_0} (t-x)^n dt = \frac{M}{n!}\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{x}^{x_0}$$

d'où $\left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

Partie II : Principe de la méthode

1. Supposons par l'absurde qu'il existe deux réels c_1 et c_2 dans $]a, b[$, avec $c_1 < c_2$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = 0$.
   Puisque f est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$, d'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f'(c) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.
   Donc $\boxed{f \text{ s'annule au plus une fois sur } [a, b].}$
2. La tangente à la courbe de f au point $(t, f(t))$ a pour équation $y = f'(t)(x - t) + f(t)$.
   Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0 \Leftrightarrow f'(t)(x - t) = -f(t)$.
   Or, par hypothèse, $f'(t) \neq 0$ donc ceci équivaut à $x - t = -\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ puis $\boxed{x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}.}$
3. (a) Puisque $c \in]a, b[$, on a $c - a > 0$ et $b - c > 0$. Soit $r = \dfrac{1}{2}\min(c - a, b - c) > 0$.
   Par définition, $r \leqslant \dfrac{1}{2}(c-a) < c-a$ (car $c-a > 0$) donc $-r > a-c$ et $r \leqslant \dfrac{1}{2}(b-c) < b-c$ (car $b-c > 0$) donc $c-r > c+a-c = a$ et $c+r < c+b-c = b$, ce qui prouve que $\boxed{J_r = [c - r, c + r] \subset]a, b[.}$
   (b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$, donc sur J_r, alors f' et f'' sont continues sur J_r.
   Par composition avec la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur le segment J_r.
   D'après le théorème des bornes atteintes, elles y sont bornées et atteignent leurs bornes donc $|f''|$ admet un maximum sur J_r et $|f'|$ y admet un minimum, ce qui légitime la définition de s_r et i_r.
   Puisque i_r est le minimum atteint de $|f'|$ sur J_r, il existe un réel $x \in J_r \subset]a, b[$ tel que $i_r = |f'(x)|$. Or, par hypothèse, f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ donc $f'(x) \neq 0$, d'où $|f'(x)| > 0$, i.e. $\boxed{i_r > 0}$.
   (c) Soit r_0 un réel strictement positif tel que $J_{r_0} \subset]a, b[$.
   Soit $r \in]0, r_0]$. Alors $J_r \subset J_{r_0} \subset]a, b[$ donc pour tout $x \in J_r$, puisque $x \in J_{r_0}$, on a $|f'(x)| \leqslant s_{r_0}$ donc en passant au maximum, $0 \leqslant s_r \leqslant s_{r_0}$.
   Par ailleurs, pour tout $x \in J_r$, puisque $x \in J_{r_0}, |f''(x)| \geqslant i_{r_0}$, donc en passant au minimum $i_r \geqslant i_{r_0}$, d'où par stricte positivité de i_r et $i_{r_0}, 0 < \dfrac{1}{ir} \leqslant \dfrac{1}{i_{r_0}}$, puis $0 < \dfrac{1}{2ir_r} \leqslant \dfrac{1}{2ir_0}$.
   En multipliant les deux inégalités qu'on vient d'obtenir, on trouve $0 \leqslant \dfrac{s_r}{2i_r} \leqslant \dfrac{s_{r_0}}{2i_{r_0}}$, autrement dit si $r \leqslant r_0, 0 \leqslant K_r \leqslant K_{r_0}$.
   Ainsi, en multipliant par $r > 0$, on obtient $0 \leqslant rK_r \leqslant rK_{r_0}$.
   Or, $\lim\limits_{r \to 0} rK_{r_0} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que
   $$\lim_{r \to 0} rK_r = 0.$$
   Il existe donc nécessairement un réel r strictement positif tel que $\boxed{0 \leqslant rK_r < 1.}$
4. (a) Par définition de s_r, on a pour tout $x \in J_r, |f''(x)| \leqslant s_r$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment J_r et on obtient (en remplaçant x par c et x_0 par c_n qui appartiennent tous deux à J_r) :
   $$\boxed{|f(c) - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n)| \leqslant \frac{s_r|c - c_n|^2}{2}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
|c_{n+1}-c| &= \left|c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - c\right| \\
&= \frac{1}{|f'(c_n)|}|f'(c_n)(c_n-c) - f(c_n)| \\
&= \frac{1}{|f'(c_n)|}|f(c) - f(c_n) - f'(c_n)(c-c_n)| \quad (\text{car } f(c)=0) \\
&\leqslant \frac{1}{|f'(c_n)|}\frac{s_r|c-c_n|^2}{2} \quad (\text{d'après la question précédente}).
\end{aligned}$$

Or, puisque $c_n \in J_r, |f'(c_n)| \geqslant i_r$ donc, puisque f' ne s'annule pas, $\frac{1}{|f'(c_n)|} \leqslant \frac{1}{i_r}$ d'où

$$\boxed{|c_{n+1}-c| \leqslant \frac{s_r}{2i_r}|c-c_n|^2 = K_r|c_n-c|^2.}$$

On a supposé que $c_n \in J_r = [c-r, c+r]$ donc $|c_n - c| \leqslant r$.
Il en découle que $|c_{n+1}-c| \leqslant r^2K_r = r(rK_r) < r$ car $r > 0$ et $rK_r < 1$ donc $\boxed{c_{n+1} \in J_r.}$

5. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
•Initialisation : Pour $n = 0, c_0 \in J_r$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \in J_r$. La question précédente montre que si $c_n \in J_r$, alors $c_{n+1} \in J_r$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Par principe de récurrence, on a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r.}$
Puisque $J_r \subset]a, b[$ qui est le domaine de définition de f et de f', on peut donc bien calculer pour tout $n \in \mathbb{N}, f(c_n)$ et $f'(c_n)$. Par ailleurs, puisque f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, donc sur J_r, la quantité $\frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ a bien un sens pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\text{la suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

6. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}$.
•Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\frac{(K_r|c_0-c|)^{2^0}}{K_r} = \frac{K_r|c_0-c|}{K_r} = |c_0 - c| \geqslant |c_0 - c|$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|c_n - c| \leqslant \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}$ et montrons que $|c_{n+1}-c| \leqslant \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$.
En utilisant la question 4.(b) et l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|c_{n+1}-c| \leqslant K_r|c_n-c|^2 \leqslant K_r \times \left(\frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}\right)^2 = \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}}{K_r},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Par principe de récurrence, on a donc bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}.}$
Puisque $c_0 \in J_r = [c-r, c+r]$, on a $|c_0 - c| \leqslant r$ donc $0 \leqslant K_r|c_0-c| \leqslant rK_r < 1$.
• Si $K_r|c_0 - c| = 0$, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r} = 0$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n - c| = 0$.

• Si $0 < K_r|c_0 - c| < 1$, alors $(K_r|c_0 - c|)^{2^n} = e^{2^n \ln(K_r|c_0-c|)}$ avec $\ln(K_r|c_0 - c|) < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln(K_r|c_0 - c|) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} (K_r|c_0 - c|)^{2^n} = \lim_{n \to +\infty} e^{2^n \ln(K_r|c_0-c|)} = 0$$

donc par comparaison, on en conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} |c_n - c| = 0$.

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |c_n - c| = 0$, ce qui implique que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = c.}$