Liste d'exercices n°16 Polynômes

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que la fonction $x \longmapsto P(x)$ est paire (resp. impaire) si et seulement si tous les cœfficients d'indices impairs (resp. pairs) de P sont nuls.

Exercice 2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(2X) = P(X)$.

Exercice 3. Soit $P = X^3 - 6X + 1$.

1. Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles distinctes. Notons-les α, β et γ.
2. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

Exercice 4. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2.$$

Exercice 5. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 6. Montrer que tout polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$ est constant.

Exercice 7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients réels. On suppose que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $P(x)Q(x) = R(x)Q(x)$.
Montrer que $P = R$ ou $Q = 0$.

Exercice 8. (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n + 1$ réels distincts et soient $a_0, \ldots, a_n, n + 1$ réels (non nécessairement distincts).

1. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré au plus n vérifiant

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \text{pour tout } j \in [\![0; n]\!] \text{ tel que } j \neq i, L_i(x_j) = 0. \end{cases}$$

2. En déduire qu'il existe un unique polynôme L de degré au plus n vérifiant

$$\forall i \in [\![0; n]\!], L(x_i) = a_i.$$

Exercice 9. Factoriser le polynôme $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a et b tels que le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 comme racine double.

Exercice 11.

1. Posons $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$.
   Trouver les racines du polynôme P sachant qu'il possède une racine multiple.
2. Considérons les polynômes suivants :

$$Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \quad \text{et} \quad R = X^3 - 7X^2 + 7X + 15.$$

   Trouver les racines de Q et de R sachant qu'ils possèdent une racine commune.

Exercice 12.
On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n n'admet pas de racine multiple.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

Exercice 13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
On suppose que $\deg(P) \geqslant 2$.

1. Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.
2. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice 14. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$.
On suppose que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)$ vaut 1 et que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - b)$ vaut -1.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} P^{(k)}(x) \geqslant 0$.

Exercice 17. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
Montrer que la fonction polynomiale associée à P est une fonction surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant c|\mathrm{Im}(z)|^n$.

Exercice 19. Décomposer en éléments simples $P = \dfrac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$.

Exercice 20. Trouver la décomposition en éléments simples de $P = \dfrac{X^{11}}{(X^2+X+1)^4}$ sous la forme

$$P = T + \frac{aX+b}{(X^2+X+1)^4} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^3} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2} + \frac{gX+h}{X^2+X+1}$$

où $T \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{R}^8$.