Devoir maison n°11
A rendre pour le jeudi 12 février 2026

Exercice 1 : Polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5.
2. Montrer que pour tout entier naturel n :
   (a) T_n est de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et son cœfficient dominant est 2^{n-1} si $n \geqslant 1$, et 1 si $n = 0$.
   (b) T_n a la parité de n.
   (c) $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout réel α et pour tout entier $n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$.
4. Etablir que pour tout $n \geqslant 1, T_n$ admet n racines distinctes dans $]-1,1[$ que sont $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
5. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,\pi[$, pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n'(\cos(\alpha)) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$.
   (b) En déduire les extrema de T_n (avec $n \geqslant 2$) sur $[-1,1]$ et en quels points ils sont atteints.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.
   (Indication : dériver $T_n'(\cos(\alpha)) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$ par rapport à α.)

Exercice 2 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme :

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Pour démontrer ce théorème, on se donne $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$.

On notera $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ ses coefficients, autrement dit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$.

On définit aussi $\mathcal{A} = \{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure.
   On notera $\alpha = \inf \mathcal{A}$.
2. Soit $r > 0$. Montrer que pour tout nombre complexe z de module r, on a

$$|P(z)| \geqslant |a_n|r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|r^k.$$

3. Montrer qu'il existe un $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant M \Rightarrow |P(z)| \geqslant \alpha + 1$.
4. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n>0}$ de nombres complexes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \leqslant |P(u_n)| \leqslant \alpha + \frac{1}{n}.$$

5. Montrer que $(u_n)_{n>0}$ admet une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n>0}$ convergente dont on notera la limite z_0.

   Indication : on pourra utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass qui affirme que toute suite bornée admet une suite extraite convergente.
6. Finalement, montrer que $|P(z_0)| = \alpha$.

   A ce stade, on a montré que la borne inférieure α est atteinte : il existe un complexe z_0 tel que $|P(z_0)| \leqslant |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Il ne reste qu'à montrer que $P(z_0) = 0$. On va raisonner par l'absurde et supposer $|P(z_0)| > 0$.
7. On pose $Q = \dfrac{P(X + z_0)}{P(z_0)}$.

   Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$.
8. Montrer qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$ et des cœfficients $(b_k)_{d \leqslant k \leqslant n}$ avec $b_d \neq 0$ tels que

$$Q = 1 - b_d X^d + \sum_{k=d+1}^{n} b_k X^k.$$

9. On écrit sous forme trigonométrique $b_d = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \leqslant r_0$:

$$|Q(re^{i\frac{\theta}{d}})| - 1 \leqslant -\rho r^d + \sum_{k=d+1}^{n} |b_k| r^k.$$

10. En déduire une contradiction et conclure.