Lycée Fénelon — PCSI
Année 2025-2026 — A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°5
Samedi 24 janvier 2026 (4h)

Problème 1 : Matrices productives

Partie I : Résultats théoriques

1. (a) Supposons que $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$. Tout d'abord, notons que $BX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a
$$(BX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} X_{k,1}.$$
Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!], B_{i,k} \geqslant 0$ et $X_{k,1} \geqslant 0$ puisque $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!], (BX)_{i,1} \geqslant 0$ car c'est une somme de termes positifs, ce qui prouve que $\boxed{BX \geqslant 0.}$

   (b) Supposons que pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, on a $BX \geqslant 0$. Montrons que $B \geqslant 0$.
Soit $j \in [\![1,n]\!]$
Soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice colonne constituée d'un 1 en ligne j et de 0 ailleurs, i.e.
pour tout $i \in [\![1,n]\!] X_{i,1} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
La matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est positive, donc par hypothèse, on a $BX \geqslant 0$, i.e. pour tout $i \in [\![1,n]\!], (BX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} \underbrace{X_{k,1}}_{=\delta_{j,k}} = B_{i,j} X_{j,1} = B_{i,j} \geqslant 0.$
Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, B_{i,j} \geqslant 0$ donc $\boxed{B \geqslant 0.}$

2. Par hypothèse, on sait que P est positive et que $P > AP$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $P_{i,1} > (AP)_{i,1}$.
D'après la question 1.a), puisque A est positive et P est positive, alors AP est positive donc pour tout $i \in [\![1,n]\!], (AP)_{i,1} \geqslant 0$, ce qui implique que $P_{i,1} > 0$ d'où $\boxed{P > 0.}$

3. (a) Par hypothèse, $X \geqslant AX$ donc pour tout $i \in [\![1,n]\!], x_i \geqslant (AX)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.
En particulier, pour $i = k$, on trouve $x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$.

Puisque $x_k = cp_k$, on en déduit que $cp_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j$. Ainsi

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) = cp_k - \sum_{j=1}^{n} ca_{k,j}p_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - \sum_{j=1}^{n} ca_{k,j}p_j = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - ca_{k,j}p_j$$

d'où

$$\boxed{c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j).}$$

(b) Puisque $P > AP$, on a $p_k > (AP)_{k,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j$ donc $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j > 0$. On peut donc diviser par $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j$ et d'après la question précédente, on obtient

$$c \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j)}{p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j}.$$

On vient de dire que le dénominateur est positif. Montrons que le numérateur l'est également.
Par définition, $c = \min\{\frac{x_j}{p_j}, j \in [\![1,n]\!]\}$ donc pour tout $j \in [\![1,n]\!], c \leqslant \frac{x_j}{p_j}$. Or, $P > 0$ donc en multipliant par p_j, on obtient que pour tout $j \in [\![1,n]\!], cp_j \leqslant x_j$, i.e. $x_j - cp_j \geqslant 0$.
D'autre part, A est positive donc pour tout $j \in [\![1,n]\!], a_{k,j} \geqslant 0$.
Ainsi, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j) \geqslant 0$ car c'est une somme à termes positifs.
Finalement, on a bien montré que $\boxed{c \geqslant 0.}$
Comme dit précédemment, on a alors pour tout $j \in [\![1,n]\!], x_j \geqslant cp_j$ avec $c \geqslant 0$ et $p_j > 0$ car $P > 0$ donc pour tout $j \in [\![1,n]\!], x_j \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{X \text{ est positive.}}$

(c) Puisque $AX = X$, on a $A(-X) = -AX = -X$ d'où $-X \geqslant A(-X)$.
En raisonnant comme dans les questions précédentes, puisque $-X \geqslant A(-X)$, on en déduit que $-X \geqslant 0$, d'où $X \leqslant 0$.
D'après la question précédente, on a à la fois $X \geqslant 0$ et $X \leqslant 0$, i.e. pour tout $j \in [\![1,n]\!], x_j \geqslant 0$ et $x_j \leqslant 0$ donc $x_j = 0$, ce qui assure que $\boxed{X = 0.}$
Ainsi, l'équation $AX = X$, équivalente à $(I_n - A)X = 0$, admet pour unique solution $X = 0$, ce qui assure que $\boxed{(I_n - A) \text{ est inversible.}}$

4. (a) On a $X = (I_n - A)Y = Y - AY$. Puisque $X \geqslant 0$, en en déduit que $Y - AY \geqslant 0$, i.e. $Y \geqslant AY$. D'après la question 3.b), ceci implique que $\boxed{Y \geqslant 0.}$
Ainsi, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, on a $(I_n - A^{-1})X \geqslant 0$ donc d'après la question 1.b), $\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$

(b) Tout d'abord, puisque $(I_n - B)^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$V = (I_n - B)^{-1}U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

De plus, puisque $(I_n - B)^{-1}$ et U sont positives, on en déduit que V est positive d'après la question 1.a).

D'après l'énoncé, on a $U > 0$. Ainsi, $V - BV = (I_n - B)V = U > 0$ donc $\boxed{V > BV.}$

Autrement dit, B est une matrice carrée positive telle qu'il existe une matrice colonne V positive vérifiant $V > BV$, i.e. $\boxed{B \text{ est productive.}}$

5. • Si A est productive, on a par définition $A \geqslant 0$ et on montré en question 3.c, que $(I_n - A)$ était inversible puis en question 4.a que $(I_n - A)^{-1}$ était positive.

   • Réciproquement, si on suppose $A \geqslant 0, I_n - A$ inversible et $(I_n - A)^{-1}$ positive, on a montré en question 4.b que A était productive.

   On a donc bien l'équivalence voulue.

6. Soit A une matrice productive. On a $A \geqslant 0$ donc $A^T \geqslant 0$ également (en effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A^T)_{i,j} = a_{j,i} \geqslant 0$).

   Par ailleurs, puisque A est productive, on sait d'après la question précédente que $I_n - A$ est inversible donc $(I_n - A)^T = I_n^T - A^T = I_n - A^T$ l'est également et son inverse est

$$(I_n - A^T)^{-1} = ((I_n - A)^T)^{-1} = ((I_n - A)^{-1})^T.$$

   Puisque A est productive, $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$ donc $((I_n - A)^{-1})^T \geqslant 0$, i.e. $(I_n - A^T)^{-1} \geqslant 0$.

   Finalement $A^T \geqslant 0, I_n - A^T$ est inversible et $(I_n - A^T)^{-1} \geqslant 0$.

   D'après la question précédente, ceci assure que $\boxed{A^T \text{ est productive.}}$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$ une matrice positive et nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^p = 0$.

   Montrons que $I_n - A$ est inversible. En effet, on a

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A^{k+1} = A^0 - A^p = I_n - A^p = I_n$$

   donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

   Or, puisque A est positive, il est clair que toutes les puissances de A sont également à cœfficients positifs, donc $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{A \text{ est productive.}}$

Partie II : Exemples de matrices productives

1. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait d'après la partie précédente que λI_n est productive si et seulement si $\lambda I_n \geqslant 0, I_n - \lambda I_n$ est inversible et $(I_n - \lambda I_n)^{-1}$ est positive.

   Tout d'abord, $\lambda I_n \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

   Ensuite, $I_n - \lambda I_n = (1 - \lambda)I_n$ est inversible si et seulement si $1 - \lambda \neq 0$, i.e. $\lambda \neq 1$ et dans ce cas, $(I_n - \lambda I_n)^{-1} = ((1-\lambda)I_n)^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda} I_n$ est positive si et seulement si $1 - \lambda > 0$, i.e. $\lambda < 1$.

   Finalement $\boxed{\lambda I_n \text{ est productive si et seulement si } 0 \leqslant \lambda < 1.}$

   • On a $D \geqslant 0$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], d_i \geqslant 0$.

   Ensuite, $I_n - D = \begin{pmatrix} 1-d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], 1-d_i \neq 0$, i.e. $d_i \neq 1$ et dans ce cas, $(I_n-D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{1-d_n} \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], 1-d_i > 0$, i.e. $d_i < 1$.

Finalement $\boxed{D \text{ est productive si et seulement si pour tout } i \in [\![1,n]\!], 0 \leqslant d_i < 1.}$

2. Tout d'abord, puisque $a \geqslant 0$, on a bien $A \geqslant 0$. Ensuite, $A^2 = 0$ donc A est une matrice positive et nilpotente. D'après la question 7 de la partie I, $\boxed{A \text{ est productive.}}$

   D'après la question 4.b de la partie I, si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $P = (I_n - A)^{-1}U$ vérifie $P > AP$.

   On a $I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(I_n - A) = 1 \neq 0$ donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $(I_n - A)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = P.}$

   On vérifie qu'on a bien $AP = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = P.$

3. Tout d'abord, on a bien $B \geqslant 0$. Inversons $I_n - B$.

   On a $I_n - B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow 4L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)$ donc $I_n - B$ est inversible d'inverse $(I_n - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{B \text{ est productive.}}$

   Posons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(I_n - B)^{-1}V = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = Q}.$

   On a alors bien $BQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = Q.$

4. On a $I_n - C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible car elle comporte une ligne de 0 donc $\boxed{C \text{ n'est pas productive.}}$

Problème 2 : Algorithme de la descente de gradient

Partie I : Préliminaires

1. Par définition, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > M, f(x) > f(0)$.

   De même, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M' < 0$ tel que pour tout $x < M', f(x) > f(0)$.

La fonction f étant continue sur le segment $[M', M]$, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet un minimum sur $[M', M]$, atteint en un réel qu'on note x_*.
Ainsi, pour tout $x \in [M', M], f(x) \geqslant f(x_*)$.
De plus, puisque $0 \in [M', M], f(x_*) \leqslant f(0)$.
Il en découle que pour tout $x > M, f(x) > f(0) \geqslant f(x_*)$ et pour tout $x < M', f(x) > f(0) \geqslant f(x_*)$.
Finalement, pour tout réel $x, f(x) \geqslant f(x_*)$ donc

$$\boxed{\exists x_* \in \mathbb{R}, f(x_*) = \min\{f(x), x \in \mathbb{R}\}.}$$

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Puisque f' est L-Lipschitzienne, on sait par définition que

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant L|x - y|.$$

En multipliant cette égalité par $|f'(x) - f'(y)|$ qui est positif, on en déduit que

$$|f'(x) - f'(y)|^2 \leqslant L|x - y||f'(x) - f'(y)| = L|(x - y)(f'(x) - f'(y)|.$$

Or, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est convexe donc on sait que f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi,
• si $x \leqslant y$, alors $f'(x) \leqslant f'(y)$ donc $x - y \leqslant 0$ et $f'(x) - f'(y) \leqslant 0$ d'où

$$(x - y)(f'(x) - f'(y)) \geqslant 0;$$

• si $x \geqslant y$, alors $f'(x) \geqslant f'(y)$ donc $x - y \geqslant 0$ et $f'(x) - f'(y) \geqslant 0$ d'où

$$(x - y)(f'(x) - f'(y)) \geqslant 0.$$

Dans les deux cas, $(x - y)(f'(x) - f'(y)) \geqslant 0$ donc

$$|(x - y)(f'(x) - f'(y)| = (x - y)(f'(x) - f'(y).$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f'(x) - f'(y)|^2 \leqslant L(x - y)(f'(x) - f'(y)).}$$

(b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcll} |\tilde{x} - \tilde{y}|^2 & = & (x - y - \tau(f'(x) - f'(y)))^2 & \\ & = & (x - y)^2 - 2\tau(x - y)(f'(x) - f'(y)) + \tau^2(f'(x) - f'(y))^2 & \\ & \leqslant & (x - y)^2 - 2\tau(x - y)(f'(x) - f'(y)) + \tau^2 L(x - y)(f'(x) - f'(y)) & \text{d'après } 2.(a) \\ & \leqslant & (x - y)^2 - (2\tau - \tau^2 L)(x - y)(f'(x) - f'(y)) & \end{array}$$

d'où

$$\boxed{|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leqslant |x - y|^2 - \tau(2 - \tau L)(x - y)(f'(x) - f'(y)).}$$

(c) Puisque la fonction f admet un minimum x_* sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, qui est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, on peut en déduire que $f'(x_*) = 0$.
Ainsi, $\tilde{x_*} = x_* - \tau f'(x_*) = x_*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl} |x_{n+1} - x_*|^2 & = & |\tilde{x_n} - \tilde{x_*}|^2 \\ & \leqslant & |x_n - x_*|^2 - \tau(2 - \tau L)(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)) \quad \text{d'après 2.(b)} \end{array}$$

On a supposé que $0 < \tau \leqslant \frac{2}{L}$ donc $\tau L \leqslant 2$ (car $L > 0$) puis $(2 - \tau L) \geqslant 0$.
Par ailleurs, on a montré en question 2.(a) que $(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)) \geqslant 0$ donc

$$\tau(2 - \tau L)(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)) \geqslant 0,$$

ce qui implique que $|x_{n+1} - x_*|^2 \leqslant |x_n - x_*|^2$.
Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $|x_{n+1} - x_*| \leqslant |x_n - x_*|$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite}\,(|x_n - x_*|)_{n\in\mathbb{N}}\,\text{est décroissante.}}$$

Partie II : Convergence rapide, sous des hypothèses fortes

3. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = Lx$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n) = x_n - \tau L x_n$ i.e.

$$\boxed{x_{n+1} = (1 - \tau L)x_n.}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(1 - \tau L)$ et de premier terme x_0 donc

$$\boxed{\text{pour tout}\,n \in \mathbb{N}, x_n = (1 - \tau L)^n x_0.}$$

(b) Puisque $x_0 \neq 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \tau L)^n = 0$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}(1 - \tau L)^n = 0 \Leftrightarrow |1 - \tau L| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \tau L < 1 \Leftrightarrow 0 < \tau < \frac{2}{L}$$

car $L > 0$.
On a donc bien montré que

$$\boxed{\text{la suite}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\text{tend vers}\,0\,\text{si et seulement si}\,0 < \tau < 2/L.}$$

4. D'après l'énoncé, la fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{2}\alpha x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la fonction g est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est convexe, ce qui équivaut à dire que g' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) - \alpha x$ donc

$$\boxed{x \mapsto f'(x) - \alpha x\,\text{est une fonction croissante sur}\,\mathbb{R}.}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Puisque g' est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $g'(x) \leqslant g'(y)$ d'où

$$f'(x) - \alpha x \leqslant f'(y) - \alpha y \quad \text{i.e.} \quad f'(y) - f'(x) \geqslant \alpha(y - x) \geqslant 0 \quad \text{car}\,\alpha > 0,$$

ce qui assure en particulier que f' est croissante.
Or, f' est L-Lipschitzienne donc $|f'(x) - f'(y)| \leqslant L|x - y|$. Puisque $x < y$ et que f' est croissante, il en découle que

$$f'(y) - f'(x) \leqslant L(y - x).$$

Finalement, on a
$$\alpha(y-x) \leqslant f'(y) - f'(x) \leqslant L(y-x).$$
En divisant par $y - x > 0$, on en déduit
$$\alpha \leqslant \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \leqslant L,$$
ce qui assure que $\boxed{\alpha \leqslant L.}$

5. Posons la fonction $h : x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x - \alpha\dfrac{x^2}{2}$.
Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h'(x) = f'(x) - f'(0) - \alpha x = g'(x) - g'(0).$$
Puisque la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, on en déduit que pour tout $x \leqslant 0, h'(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0, h'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que la fonction h admet un minimum en 0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) \geqslant h(0) = 0$.
Il en découle que
$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(0) + f'(0)x + \alpha\frac{x^2}{2}.}$$
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(0)+f'(0)x+\alpha\frac{x^2}{2} = +\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
De même, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(0)+f'(0)x+\alpha\frac{x^2}{2} = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{\alpha}{2}\right) = +\infty$ par produit de limites car $\alpha > 0$.
On en déduit une nouvelle fois par comparaison que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
D'après la question 1, on en déduit que
$$\boxed{f \text{ admet un minimiseur sur } \mathbb{R}.}$$

6. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
• Si $x = y$, l'inégalité demandée est triviale puisque les deux membres sont nuls.
• Si $x < y$, on a établi en question 4 que
$$\alpha(y-x) \leqslant f'(y) - f'(x)$$

d'où en multipliant chaque membre de l'inégalité par $y-x>0$,

$$\alpha(y-x)^2 \leqslant (f'(y)-f'(x))(y-x) = (f'(x)-f'(y))(x-y),$$

i.e. $\alpha|x-y|^2 \leqslant (f'(x)-f'(y))(x-y)$.

• Si $x>y$, on applique le point précédent en échangeant x et y et on obtient

$$\alpha|y-x|^2 \leqslant (f'(y)-f'(x))(y-x),$$

ce qui s'écrit également $\alpha|x-y|^2 \leqslant (f'(x)-f'(y))(x-y)$.

Finalement, on a bien

$$\boxed{\text{pour tous}\, x,y\in\mathbb{R}, \alpha|x-y|^2 \leqslant (f'(x)-f'(y))(x-y).}$$

7. On sait que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on a établi dans la question 4 que f' est croissante donc f est convexe. De plus, f' est L-Lipschitzienne.

   D'après la question 2.(b), on en déduit que pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

   $$|\tilde{x}-\tilde{y}|^2 \leqslant |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)(x-y)(f'(x)-f'(y)).$$

   D'après la question précédente, on sait que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \alpha|x-y|^2 \leqslant (x-y)(f'(x)-f'(y))$.

   Puisque $0<\tau\leqslant \dfrac{2}{L}$ (hypothèse de l'énoncé), $\tau(2-\tau L)\geqslant 0$ donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $\tau(2-\tau L)$, on obtient pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

   $$\alpha\tau(2-\tau L)|x-y|^2 \leqslant \tau(2-\tau L)(x-y)(f'(x)-f'(y)).$$

   En injectant cette dernière inégalité dans celle de la question 2.(b), on trouve

   $$|\tilde{x}-\tilde{y}|^2 \leqslant |x-y|^2 - \alpha\tau(2-\tau L)|x-y|^2$$

   d'où

   $$\boxed{\text{pour tous}\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, |\tilde{x}-\tilde{y}|^2 \leqslant |x-y|^2(1-\alpha\tau(2-L\tau)).}$$

8. Comme montré en question 2.(c), on a $\tilde{x_*}=x_*$. Ainsi, en appliquant le résultat de la question précédente, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

   $$|x_{n+1}-x_*|^2 = |\tilde{x_n}-\tilde{x_*}|^2 \leqslant |x_n-x_*|^2(1-\alpha\tau(2-L\tau)).$$

   Or, d'après la question précédente, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $x\neq y$, on a

   $$\frac{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}{|x-y|^2} \leqslant 1-\alpha\tau(2-L\tau)$$

   donc $1-\alpha\tau(2-L\tau)\geqslant 0$.

   Par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$|x_{n+1}-x_*| \leqslant |x_n-x_*|\sqrt{1-\alpha\tau(2-L\tau)}.$$

   Posons $\rho=\sqrt{1-\alpha\tau(2-L\tau)}$.

   Par récurrence immédiate, on trouve que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\boxed{|x_n-x_*| \leqslant \rho^n|x_0-x_*|.}$$

   Puisque dans cette question $0<\tau<\dfrac{2}{L}$, il vient $\alpha\tau(2-L\tau)>0$, donc on a bien $\boxed{0\leqslant\rho<1.}$

   Puisque $0\leqslant\rho<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho^n|x_0-x_*|=0$, et on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-x_*|=0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_*.}$

Partie III : Convergence lente, sous des hypothèses faibles

9. • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = x^2$.
   • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) = 0$.
   • Puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$. Le théorème de la limite de la dérivée permet alors d'affirmer que f est dérivable en 0, que $f'(0) = 0$ et que f' est continue en 0.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x < 0 \\ x^2 & \text{si}\, x \geqslant 0 \end{cases}.$$
   La fonction f' est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et est continue en 0 d'après le théorème de la limite de la dérivée.
   Finalement, f' est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).}$
   Par ailleurs, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x^2 \geqslant 0$ et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est convexe.}}$
   Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ donc
   $$\boxed{\text{l'ensemble des minimiseurs de}\, f\, \text{est}\, \mathbb{R}_- =]-\infty, 0].}$$

10. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < \dfrac{1}{\tau}$.
    •**Initialisation :** La propriété est vraie au rang $n = 0$ par hypothèse de l'énoncé.
    •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $0 < x_n < \dfrac{1}{\tau}$. Montrons que $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{\tau}$.
    Par définition, on a $x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n)$.
    Par hypothèse de récurrence, $x_n > 0$ donc $f'(x_n) = x_n^2$ d'après la question précédente.
    Ainsi, $x_{n+1} = x_n - \tau x_n^2$ d'où $x_{n+1} = x_n(1 - \tau x_n)$.
    Par hypothèse de récurrence, $x_n < \dfrac{1}{\tau}$ donc $1 - \tau x_n > 0$ puis $x_n(1 - \tau x_n) > 0$ donc $x_{n+1} > 0$.
    Enfin, puisque $\tau x_n > 0$, on a $0 < 1 - \tau x_n < 1$ donc $0 < x_n(1 - \tau x_n) < x_n < \dfrac{1}{\tau}$ d'où $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{\tau}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
    On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < \dfrac{1}{\tau}$.
    On a également vu que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n(1 - \tau x_n)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \tau x_n < 1,$$
    ce qui prouve que
    $$\boxed{\text{la suite}\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\, \text{est décroissante et à valeurs strictement positives.}}$$

    (b) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 d'après la question précédente.
    D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons l sa limite.

En passant à la limite dans l'égalité

$$x_{n+1} = x_n(1 - \tau x_n),$$

on trouve $l = l(1 - \tau l)$ d'où $\tau l^2 = 0$, i.e. $l = 0$ (puisque $\tau > 0$).

On a donc bien monté que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{x_n} + \frac{\tau}{1 - \tau x_n} = \frac{1 - \tau x_n + \tau x_n}{x_n(1 - \tau x_n)} = \frac{1}{x_n(1 - \tau x_n)}$$

ce qui prouve que $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{\tau}{1 - \tau x_n}.}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant \dfrac{x_0}{1 + n\tau x_0}$.

•**Initialisation :** Pour $n = 0$, $\dfrac{x_0}{1 + n\tau x_0} = x_0 \geqslant x_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $x_n \leqslant \dfrac{x_0}{1 + n\tau x_0}$ et montrons que

$$x_{n+1} \leqslant \frac{x_0}{1 + (n+1)\tau x_0}.$$

D'après le calcul précédent,

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{\tau}{1 - \tau x_n}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\dfrac{1}{x_n} \geqslant \dfrac{1 + n\tau x_0}{x_0}$.

Par ailleurs, $1 - \tau x_n < 1$ car $\tau > 0$ et $x_n > 0$ donc $\dfrac{\tau}{1 - \tau x_n} \geqslant \tau$.

On en déduit que $\dfrac{1}{x_{n+1}} \geqslant \dfrac{1 + n\tau x_0}{x_0} + \tau = \dfrac{1 + (n+1)\tau x_0}{x_0}$ d'où $x_{n+1} \leqslant \dfrac{x_0}{1 + (n+1)\tau x_0}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant \frac{x_0}{1 + n\tau x_0}.}$$

11. • Supposons que $x_0 \leqslant 0$.
On a alors $x_1 = x_0 - \tau f'(x_0)$. Or, $f'(x_0) = 0$ puisque $x_0 \leqslant 0$ donc $x_1 = x_0$.
Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = x_0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}_-$, qui est un minimiseur de f d'après la question 9.
• Si $0 < x_0 < \dfrac{1}{\tau}$, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 \in \mathbb{R}_-$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de f.
• Supposons que $x_0 \geqslant \dfrac{1}{\tau} > 0$.
Puisque $x_0 > 0$, on a $x_1 = x_0 - \tau f'(x_0) = x_0 - \tau x_0^2 = x_0(1 - \tau x_0)$.
Puisque $x_0 \geqslant \dfrac{1}{\tau}, 1 - \tau x_0 \leqslant 0$ donc $x_1 \leqslant 0$.
On est alors ramené au premier cas, et on en déduit que pour tout $n \geqslant 1, x_n = x_1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_1 \in \mathbb{R}_-$ qui est un minimiseur de f.
Dans tous les cas, $\boxed{\text{la suite}\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, \text{converge vers un minimiseur de}\, f.}$

12. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction dont la courbe représentative est la tangente à la courbe de f au point x est $y \mapsto f'(x)(y-x)+f(x)$. Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est convexe, la courbe de f est située au-dessus de ses tangentes donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Posons pour tout $y \in \mathbb{R}, h(y) = f(x)+f'(x)(y-x)+\dfrac{L}{2}(y-x)^2-f(y)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction f l'est et on a pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$h'(y) = f'(x) + L(y-x) - f'(y).$$

Puisque f' est L-Lipschitzienne, $|f'(x)-f'(y)| \leqslant L|x-y|$. De plus, f est convexe donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi :
- si $x \leqslant y$, alors $f'(x) \leqslant f'(y)$ et on obtient $f'(y)-f'(x) \leqslant L(y-x)$ donc $h'(y) \geqslant 0$;
- si $x \geqslant y$, alors $f'(x) \geqslant f'(y)$ et on obtient $f'(x)-f'(y) \leqslant L(x-y)$ donc $h'(y) \leqslant 0$.

On en déduit que la fonction h est décroissante sur $]-\infty, x]$ et croissante sur $[x, +\infty]$ donc la fonction h admet un minimum en x.

y	$-\infty$		x		$+\infty$
$h'(y)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}, h(y) \geqslant h(0) = 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{pour tous}\, x, y \in \mathbb{R}, f(y) \leqslant f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{L}{2}(y-x)^2.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité obtenue en question précédente pour $x = x_n$ et $y = x_{n+1}$.
Dans ce cas, on a $y - x = x_{n+1} - x_n = -\tau f'(x_n)$ donc

$$f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n) + f'(x_n)(-\tau f'(x_n)) + \frac{L}{2}(-\tau f'(x_n))^2 = f(x_n) + (-\tau + \frac{L}{2}\tau^2)|f'(x_n)|^2$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2-\tau L)|f'(x_n)|^2.}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) - f(x_n) \leqslant -\dfrac{\tau}{2}(2-\tau L)|f'(x_n)|^2$.

Or, par hypothèse, $0 < \tau < \dfrac{2}{L}$ donc $\dfrac{\tau}{2}(2-\tau L) > 0$.

On en déduit que $-\dfrac{\tau}{2}(2-\tau L)|f'(x_n)|^2 \leqslant 0$ (puisque $|f'(x_n)|^2 \geqslant 0$) donc

$$\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) - f(x_n) \leqslant 0,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite}\, (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\, \text{est décroissante.}}$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Puisque x_* est un minimiseur de f, on a $f(x) \geqslant f(x_*)$ donc $f(x) - f(x_*) \geqslant 0$.
Par ailleurs, d'après la question 12.(a), $f(x) - f(x_*) \leqslant f'(x)(x - x_*)$.
Puisque $f(x) - f(x_*) \geqslant 0$, on en déduit que $f'(x)(x - x_*) \geqslant 0$ donc
$$f'(x)(x - x_*) = |f'(x)(x - x_*)| = |f'(x)||x - x_*|.$$
Finalement, on obtient bien que
$$\boxed{\text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f(x) - f(x_*) \leqslant |x - x_*||f'(x)|.}$$

14. On suppose $x_0 \neq x_*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,
$$0 \leqslant f(x_n) - f(x_*) \leqslant |x_n - x_*||f'(x_n)|.$$
Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que f est convexe, admet un minimiseur x_*, que f' est L-Lipschitzienne et que $0 < \tau < \dfrac{2}{L}$, on peut appliquer le résultat de la question 2.(c), à savoir que la suite $(|x_n - x_*|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $|x_n - x_*| \leqslant |x_0 - x_*|$.
On en déduit que $0 \leqslant f(x_n) - f(x_*) \leqslant |x_0 - x_*||f'(x_n)|$ (puisque $|f'(x_n)| \geqslant 0$).
Puisque $x_0 \neq x_*$, on peut diviser par $|x_0 - x_*| > 0$ et on obtient
$$|f'(x_n)| \geqslant \frac{f(x_n) - f(x_*)}{|x_0 - x_*|} \geqslant 0.$$
Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $|f'(x_n)|^2 \geqslant \dfrac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}$.
Enfin, puisque $-\dfrac{\tau}{2}(2 - \tau L) < 0$, on en déduit que
$$-\frac{\tau}{2}(2 - \tau L)|f'(x_n)|^2 \leqslant -\frac{\tau}{2}(2 - \tau L)\frac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}.$$
En injectant cette dernière inégalité dans l'inégalité obtenue en question 12.(c), on trouve
$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2 - \tau L)\frac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}.}$$

15. • Supposons que $x_0 \neq x_*$.
Puisque la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $f(x_*)$, elle converge d'après le théorème de la limite monotone vers une limite l.
En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on trouve
$$l \leqslant l - \frac{\tau}{2}(2 - \tau L)\frac{|l - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}$$
d'où $|l - f(x_*)|^2 \leqslant 0$ (puisque $\dfrac{\tau}{2}(2 - \tau L) > 0$).
Or, puisque $|l - f(x_*)|^2 \geqslant 0$, on en déduit que $|l - f(x_*)|^2 = 0$, d'où $l = f(x_*)$.
• Dans le cas où $x_0 = x_*$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à x_*. En effet, puisque x_* est un minimiseur de f sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ qui est un intervalle ouvert, on a $f'(x_*) = 0$ donc $x_1 = x_0 - \tau f'(x_0) = x_* - \tau f'(x_*)$ et on a par récurrence immédiate $x_n = x_*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_*)$.
On a donc bien montré que, dans tous les cas,
$$\boxed{\text{la suite}\,(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\text{converge vers}\, f(x_*).}$$