# Corrigé du devoir maison n°1

**Exercice 1.**

1. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons-le par récurrence.

   **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

   **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \quad \text{(Relation de Chasles)} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4n + 4\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

   ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.

   D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

2. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n = n$.

   •**Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} x_k\right)^2$ donc

$$x_1^3 = x_1^2 \Rightarrow x_1^2(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,\text{ou}\, x_1 = 1.$$

   Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, on a $x_1 = 1$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!], x_k = k$.
Montrons que $x_{n+1} = n+1$.
Par hypothèse sur la suite, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 + x_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + x_{n+1}\right)^2 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + x_{n+1}^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \times x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1}\left(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0 \quad (\text{car}(x_{n+1} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x_{n+1} - n - 1)(x_{n+1} + n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1} = n+1 \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = -n.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n > 0$ donc $x_n = -n$ est impossible. Ainsi, on a nécessairement $x_{n+1} = n+1$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, x_n = n.}$$

**Exercice 2.** Raisonnons par analyse-synthèse.
•**Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \,\text{ou}\, f(0) = 1.$$

Supposons que $f(0) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors en posant $y = 0$ :

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow x = 0,$$

et ce pour tout réel $x$, ce qui est absurde.
Nécessairement, on a $f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en posant $y = 0$ :

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow f(x) = x + 1.$$

•**Synthèse :** Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
On a alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - xy - 1 = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'unique fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ à vérifier cette propriété est } \begin{array}{cccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1. \end{array}}$$