Corrigé de la liste d'exercices n°16 — Polynômes

Exercice 1. • Si P est le polynôme nul, alors la fonction $x \mapsto P(x)$ est à la fois paire et impaire et tous les cœfficients de P sont nuls.
• On suppose dorénavant que P n'est pas le polynôme nul.
Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.
Supposons que $x \mapsto P(x)$ est paire, i.e. pour tout réel $x, P(x) = P(-x)$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$, ce qui implique que si k est impair, $a_k = -a_k$ d'où $a_k = 0$.
Ainsi, si $x \mapsto P(x)$ est paire, tous les cœfficients d'indice impair de P sont nuls.
Réciproquement, il est clair que si pour tout k impair, $a_k = 0$, alors la fonction $x \mapsto P(x)$ est paire.
L'autre cas se traite de manière analogue.

Exercice 2. • Il est clair que le polynôme nul vérifie la condition voulue.
• Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x)$.
Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, ou $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.
On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, ceci implique que pour tout $k \in [\![0, n]\!], 2^k a_k = a_k$, i.e. $(2^k - 1)a_k = 0$.
Si $k \neq 0$, alors $2^k - 1 \neq 0$ donc pour tout $k \neq 0, a_k = 0$. Ainsi, $P = a_0$ est forcément constant.
• Réciproquement, tous les polynômes constants vérifient bien pour tout réel $x, P(2x) = P(x)$.
Finalement, les polynômes cherchés sont les polynômes constants.

Exercice 3.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, P'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$.
   La fonction $x \mapsto P(x)$ admet donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

   Puisque P est continue, strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et que $0 \in P(]-\infty, -1[)$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que P admet une unique racine $\alpha \in]-\infty, -1[$.
   On montre de même que P admet une unique racine $\beta \in]-1, 1[$ et une unique racine $\gamma \in]1, +\infty[$.

2. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 2x^3 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma.$$

Par unicité des cœfficients d'un polynôme, on en déduit que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et que $\alpha\beta\gamma = -1$.

Exercice 4. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) - n^2 = 0$.
Ainsi, le polynôme $P(X) - X^2$ admet une infinité de racines, ce qui assure que $P(X) - X^2 = 0$, d'où $P(X) = X^2$.

Exercice 5. Raisonnons par analyse-synthèse.
• **Analyse :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2+1)P(x)$.
Si P est constant égal à $a \in \mathbb{R}$, alors l'égalité pour $x = 1$ donne $a = 2a$ d'où $a = 0$. Ainsi, le seul polynôme constant à vérifier cette condition est le polynôme nul.
Si P n'est pas un polynôme constant, soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$ donc le polynôme $P(X^2)$ est de degré $2n$.
Par ailleurs, le polynôme $(X^2+1)P(X)$ est de degré $n+2$ donc on a nécessairement $2n = n+2$ d'où $n = 2$.
Ainsi, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$.
La condition devient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^4+bx^2+c = (x^2+1)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ax^4+bx^2+c = ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+c.$$

Par unicité des cœfficients d'un polynôme, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ a+c & = & b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & -a \end{array}\right.$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 - a = a(x^2-1)$ où $a \in \mathbb{R}$.
• **Synthèse :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = a(X^2-1)$.
Alors $(X^2+1)P(X) = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^4-1) = P(X^2)$.
Finalement, les polynômes cherchés sont les polynômes de la forme $P(X) = a(X^2-1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme constant de période T, alors $P(\mathbb{R}) = P([0,T])$. Puisque P est continu et que $[0,T]$ est un segment, d'après le théorème des bornes atteintes, on en déduit que $P([0,T])$ est un segment donc $P(\mathbb{R}) = P([0,T])$ est un segment, ce qui implique que P est borné.
Supposons par l'absurde que P n'est pas constant. Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$.
Alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ donc, puisque $n \neq 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \left\{\begin{array}{ll} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{array}\right.,$$

ce qui contredit le fait que P est borné.
Nécessairement, si P est périodique, alors P est constant.

Exercice 7. • Si $Q = 0$, on a bien pour tout $x \in [a,b], P(x)Q(x) = R(x)Q(x)$.
• On suppose dorénavant que $Q \neq 0$. Alors Q s'annule au maximum un nombre fini de fois sur l'intervalle $[a,b]$. Notons $x_1, \dots, x_n$ les racines éventuelles de Q sur l'intervalle $[a,b]$.
On a pour tout $x \in [a,b], Q(x)(P(x) - R(x)) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [a,b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, P(x) - R(x) = 0$.
Puisque $a < b$, l'intervalle $[a,b]$ est infini donc l'ensemble $[a,b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ est infini. Ainsi, le polynôme $P - R$ s'annule une infinité de fois, ce qui implique que $P - R$ est le polynôme nul, i.e. $P = R$.

Exercice 8.

1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
Construisons un polynôme L_i de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}, L_i(x_j) = 0$. Alors L_i est factorisable par $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i}(X - x_j)$. Puisque ce produit est de degré n et que $\deg(L_i) \leqslant n$, nécessairement L_i est de degré n et il existe un réel λ tel que $L_i = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i}(X - x_j)$.

   Par ailleurs, pour avoir $L_i(x_i) = 1$, il vient $1 = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i}(x_i - x_j)$. Puisque les réels $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, on a pour tout $j \neq i, x_i - x_j \neq 0$ donc $\lambda = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i} \frac{1}{x_i - x_j}$, ce qui implique que $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.
On voit dès lors que le polynôme L_i est uniquement déterminé. Montrons-le néanmoins.
Supposons qu'il existe un autre polynôme T_i de degré inférieur ou égal à n tel que $T_i(x_i) = 1$ et pour tout $j \neq i, T_i(x_j) = 0$.
Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!], (L_i - T_i)(x_k) = 0$.
Or, $\deg(L_i - T_i) \leqslant \max(\deg(L_i), \deg(T_i)) \leqslant n$ donc $L_i - T_i$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant $n+1$ racines distinctes. Nécessairement, $L_i - T_i = 0$, i.e. $L_i = T_i$, ce qui assure l'unicité du polynôme L_i.
2. • **Existence :**
Posons $L = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k$. Pusique pour tout $k \in [\![0,n]\!], \deg(L_k) \leqslant n$, alors $\deg(L) \leqslant n$.
De plus, pour tout $i \in [\![0,n]\!], L(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{i,k} = a_i$.
Le polynôme L convient donc.
• **Unicité :**
Supposons qu'il existe un autre polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(T) \leqslant n$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!], T(x_i) = a_i$. Alors pour tout $i \in [\![0,n]\!], (L - T)(x_i) = 0$ donc $L - T$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant $n+1$ racines, ce qui prouve que $L - T = 0$, i.e. $L = T$.

Le polynôme $L = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k$ est donc bien l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!], L(x_i) = a_i$.

Exercice 9.
On vérifie aisément que $P(1) = 0$ donc P est factorisable par $X - 1$ et on a

$$P = (X-1)(X^4 - 2X^3 - X + 2).$$

De même, 1 est racine du polynôme $X^4 - 2X^3 - X + 2$ donc on peut de nouveau factoriser par $X - 1$:

$$P = (X-1)(X-1)(X^3 - X^2 - X - 2).$$

On remarque que 2 est racine du polynôme $X^3 - X^2 - X - 2$ donc

$$P = (X-1)^2(X-2)(X^2 + X + 1).$$

Enfin, les racines de $X^2 + X + 1$ sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc

$$P = (X-1)^2(X-2)(X-j)(X-\overline{j}).$$

Exercice 10. Soit $P : x \mapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$. Le polynôme P admet 1 comme racine double si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}, P'(x) = (n+1)ax^n + nbx^{n-1}$ et $P''(x) = n(n+1)ax^{n-1} + n(n-1)bx^{n-2}$ si $n \neq 1$ et $P''(x) = 2a$ si $n \neq 1$.

- Si $n = 1$, 1 est racine double de P si et seulement si $\begin{cases} a+b+1 &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ 2a &\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \end{cases}$

Pour $n = 1, a = 1$ et $b = -2$ on a bien $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

- Si $n > 1$, 1 est racine double de P si et seulement si $\begin{cases} a+b+1 &= 0 \\ (n+1)a + nb &= 0 \\ n(n+1)a + n(n-1)b &\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a &= n \\ b &= -n-1 \\ n^2(n+1) - n(n-1)(n+1) &\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= n \\ b &= -n-1 \\ n(n+1) &\neq 0 \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme qui satisfait la condition voulue est

$$P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

Exercice 11.

1. Soit α une racine multiple de P. Alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
   Or, $P'(X) = 12X^2 - 32X - 19 = 12(X + \frac{1}{2})(X - \frac{19}{6})$.
   On constate que $\alpha = -\frac{1}{2}$ est racine de P' et de P donc $-\frac{1}{2}$ est racine double de P. Ainsi, P est factorisable par $4(X + \frac{1}{2})^2 = (2X+1)^2$.
   On obtient :
   $$P(X) = (2X+1)(2X^2 - 9X - 5) = (2X+1)^2(X-5).$$
   Les racines de P sont donc $-\frac{1}{2}$ (racine double) et 5 (racine simple).
2. On constate que -1 est racine de R donc
   $$R(X) = (X+1)(X^2 - 8X + 15) = (X+1)(X-3)(X-5).$$
   Les racines de R sont donc $-1, 3$ et 5.
   On constate que 3 est racine de Q donc
   $$Q(X) = (X-3)(X^2 - 6X + 8) = (X-3)(X-4)(X-2).$$
   Les racines de Q sont donc $2, 3$ et 4.

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (si $n = 0$, $P_0 = 1$). Supposons par l'absurde que P_n admette une racine multiple α.
   Alors $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. Or, $P_n' = P_{n-1}$ donc $P_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0$.
   On en déduit que $P_n(\alpha) - P_{n-1}(\alpha) = 0$. Or, $P_n - P_{n-1} = \dfrac{X^n}{n!}$ donc $\dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$, ce qui implique que $\alpha = 0$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1 \neq 0$.
   Ainsi, P_n n'admet pas de racine multiple.
2. Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, P_n(x) \geqslant 1 > 0$ donc les racines éventuelles de P_n sont strictement négatives.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le résultat suivant : P_{2n} n'admet pas de racine réelle et P_{2n+1} admet une unique racine réelle.
   •**Initialisation :** Pour $n = 0, P_0 = 1$ n'admet pas de racine réelle et $P_1 = 1 + X$ admet une seule racine réelle : -1.
   •**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au rang $n + 1$.
   Montrons que P_{2n+2} n'admet pas de racine réelle.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}, P_{2n+2}'(x) = P_{2n+1}(x)$. Par hypothèse de récurrence, P_{2n+1} admet une unique racine réelle $\alpha < 0$.
   Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_{2n+2}(x) = +\infty$, ce qui nous fournit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P_{2n+1}(x)$		$-$	0	$+$	
P_{2n+2}	$+\infty$	$\searrow$	$P_{2n+2}(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Or, $P_{2n+2}(\alpha) = P_{2n+1}(\alpha) + \dfrac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} = \dfrac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ car $\alpha < 0$. On en déduit que P_{2n+2} n'admet pas de racine réelle et que pour tout $x \in \mathbb{R}, P_{2n+2} > 0$.
   Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}, P_{2n+3}'(x) = P_{2n+2}(x) > 0$ donc la fonction $x \mapsto P_{2n+3}(x)$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{2n+3}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{2n+3}(x) = +\infty$.
   D'après le théorème de la bijection, P_{2n+3} réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et a fortiori, P_{2n+3} s'annule une seule fois.
   On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{2n}$ n'admet pas de racine réelle et P_{2n+1} admet une unique racine réelle.

Exercice 13.

1. Supposons que P est scindé à racines simples, i.e. $P = a\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - x_k)$, où $p = \deg(P)$.
   Quitte à renuméroter les x_k, on peut supposer que $x_1 < \cdots < x_p$.
   Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!], P$ est continu sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$ et $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$.
   D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\alpha_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(\alpha_k) = 0$.
   Ainsi, P' admet $p - 1$ racines distinctes $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{p-1}$ et est de degré $p - 1$. On en déduit que P' est bien scindé à racines simples.

Remarque : le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{C}[X]$.
Le polynôme $P(X)=X^3-1=(X-1)(X-j)(X-\overline{j})$ est scindé à racines simples mais son polynôme dérivé $P'(X)=3X^2$ ne l'est pas (0 est racine double).

2. Supposons que P est scindé, i.e. $P=a\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}$, avec $x_1<\cdots<x_p$ et pour tout $k\in[\![1,p]\!], m_k\in\mathbb{N}^*$. On a alors $\deg(P)=\sum_{k=1}^{p}m_k$ donc $\deg(P')=\sum_{k=1}^{p}m_k-1$.
La même preuve que celle en question précédente montre que P' admet $p-1$ racines distinctes $\alpha_1<\cdots<\alpha_{p-1}$ telles que pour tout $k\in[\![1,p-1]\!], \alpha_k\in]x_k,x_{k+1}[$.
Par ailleurs, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, puisque x_k est racine de P d'ordre m_k, alors x_k est racine de P' d'ordre m_k-1 (avec éventuellement $m_k-1=0$).
Ainsi, P' est divisible par $\prod_{k=1}^{p-1}(X-\alpha_k)\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k-1}$. Or, ce dernier polynôme est de degré $p-1+\sum_{k=1}^{p}(m_k-1)=\sum_{k=1}^{p}m_k-p+p-1=\sum_{k=1}^{p}m_k-1=\deg(P')$.
Par égalité des degrés, on en déduit qu'il existe une constance $c\in\mathbb{R}^*$ telle que
$$P'=c\prod_{k=1}^{p-1}(X-\alpha_k)\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k-1},$$
ce qui prouve que P' est scindé.
Remarque : Cette question n'a pas d'intérêt sur $\mathbb{C}[X]$ car tout polynôme de degré $\geqslant 1$ y est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss).

Exercice 14. • Si $P=0$, alors $P'=0$ divise P.
• Si P est un polynôme constant non nul, alors $P'=0$ ne divise pas P.
• Supposons désormais que P est un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ tel que P' divise P. Puisque P' est de degré $n-1\in\mathbb{N}$, il existe deux réels λ et a tels que $P(X)=\lambda(X-a)P'(X)$.
<u>$\triangleright$ 1ère méthode :</u> D'après la formule de Taylor, on a
$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
et
$$P'(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P'^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P^{(k+1)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$
On a alors
$$\begin{aligned}P(X)=\lambda(X-a)P'(X) \quad&\Leftrightarrow\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P^{(k+1)}(a)}{k!}(X-a)^{k+1}\\ &\Leftrightarrow\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k=\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^k\\ &\Leftrightarrow\quad P(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}\left(\frac{1}{k}-\lambda\right)(X-a)^k=0.\end{aligned}$$
Par unicité des cœfficients du polynôme nul, tous les cœfficients sont nuls, en particulier le cœfficient dominant, qui est $\frac{P^{(n)}(a)}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)$. Or, le polynôme $P^{(n)}$ est une constante non nulle puisque P est de degré n, donc $P^{(n)}(a)\neq 0$. Nécessairement, cela implique que $\lambda=\frac{1}{n}$.

Il reste alors $P(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n}\right)(X-a)^k=0$.

En raisonnant de même, le cœfficient dominant de ce polynôme est nul, i.e. $\dfrac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=0$, donc $P^{(n-1)}(a)=0$ et par récurrence descendante, on obtient que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.

Finalement $P(X)=\dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$, c'est à dire P est de la forme $P=c(X-a)^n$, où $c\in\mathbb{R}^*$.

$\triangleright$ <u>2ème méthode :</u> D'après la formule de Leibniz, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a

$$P^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\underbrace{(\lambda(X-a))^{(i)}}_{=0\text{ si }i>1}P'^{(k-i)}=\lambda(X-a)P^{(k+1)}+k\lambda P^{(k)}.$$

En évaluant en a, on obtient pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(a)=k\lambda P^{(k)}(a)$ d'où $P^{(k)}(a)(k\lambda-1)=0$, i.e. $P^{(k)}(a)=0$ ou $k\lambda=1$.

Puisque $P^{(n)}$ est un polynôme constant non nul, on a $P^{(n)}(a)\neq 0$ donc $n\lambda=1$, i.e. $\lambda=\dfrac{1}{n}$. Il s'ensuit que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $k\lambda=\dfrac{k}{n}\neq 1$ donc $P^{(k)}(a)=0$.

Ainsi, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$ et $P^{(n)}(a)\neq 0$. Par caractérisation de la multiplicité d'une racine, on en déduit que a est une racine de P d'ordre n, donc P est de la forme $P=c(X-a)^n$, où $c\in\mathbb{R}$.

• Réciproquement, si P est de la forme $P=c(X-a)^n$, où a et c sont deux réels avec $c\in\mathbb{R}^*$ et $n\geqslant 1$, alors $P'=nc(X-a)^{n-1}$ et $P=\dfrac{1}{n}(X-a)P'$ donc P' divise bien P.

Finalement, les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé sont les polynômes de la forme $P=c(X-a)^n$ où $(a,c,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$ (si $c=0$, on retrouve le polynôme nul).

Exercice 15. Par hypothèse, il existe deux polynômes Q et R tels que

$$P=(X-a)Q+1=(X-b)R-1.$$

Ceci implique que $P(a)=1$ et $P(b)=-1$.

La division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ s'écrit $P(X)=(X-a)(X-b)S(X)+\alpha X+\beta$, où $S\in\mathbb{R}[X]$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

En évaluant cette dernière égalité en a et en b, on trouve $P(a)=\alpha a+\beta$ et $P(b)=\alpha b+\beta$ d'où

$$\begin{cases}\alpha a+\beta &= 1\\ \alpha b+\beta &= -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha &= \frac{2}{a-b}\\ \beta &= 1-\frac{2a}{a-b}=-\frac{a+b}{a-b}\end{cases},$$

ce qui est possible car $a\neq b$.

Finalement, le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ est $\dfrac{1}{a-b}(2X-a-b)$.

Exercice 16. Notons $Q=\sum_{k\in\mathbb{N}}P^{(k)}=\sum_{k=0}^{\deg(P)}P^{(k)}$, qui est également un polynôme de même degré que P.

• Si $\deg(P)=0$, le résultat est évident car alors $Q=P$.

• On suppose dorénavant que $\deg(P)\geqslant 1$. Notons $n=\deg(P)\geqslant 1$ et a_n le cœfficient dominant de P. On a alors $P(x)\underset{\pm\infty}{\sim}a_nx^n$. L'hypothèse implique donc que $a_n>0$ (et que n est pair pour que $\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=+\infty$).

Par ailleurs, on a également $Q(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ donc $\lim_{x \to \pm\infty} Q(x) = +\infty$.
Ainsi, d'après un exercice vu dans le TD sur les limites et la continuité, puisque Q est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il en découle que Q admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en un réel α.
Puisque c'est un minimum global sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $Q'(\alpha) = 0$.
Or, $Q' = Q - P$ donc $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha)$, ce qui implique que $Q(\alpha) = P(\alpha) \geqslant 0$ par hypothèse.
On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) \geqslant Q(\alpha) \geqslant 0$.

Exercice 17. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = \alpha$.
Posons $Q = P - \alpha$. Puisque P n'est pas constant, le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas constant.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) = 0$, i.e. $P(z) = \alpha$.
On a donc bien montré que $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

Exercice 18. • Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$, i.e. il existe des réels $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et un réel non nul λ tel que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

où les $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont les racines de P (éventuellement confondues).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$|P(z)| = |\lambda| \prod_{k=1}^{n} |z - x_k| \geqslant |\lambda| \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z - \underbrace{x_k}_{\in \mathbb{R}})| = |\lambda| \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z)| = c|\mathrm{Im}(z)|^n$$

où $c = |\lambda| \in \mathbb{R}_+^*$.
• Réciproquement, supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant c|\mathrm{Im}(z)|^n$.
Montrons que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Puisque P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit de montrer que toutes les racines de P sont réelles.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. D'après l'hypothèse, on a

$$0 = |P(\alpha)| \geqslant c|\mathrm{Im}(\alpha)|^n$$

donc $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, ce qui prouve que $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ainsi, toutes les racines de P sont réelles donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. On cherche des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k}$.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
On a $(X+i)P = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (X+k)} = a_i + \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{a_k(X+i)}{X+k}$.
En évaluant cette dernière égalité en $X = -i$, on trouve

$$a_i = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (k-i)} = \frac{n!}{(-1)^i \displaystyle\prod_{k=0}^{i-1} (i-k) \prod_{k=i+1}^{n} (k-i)} = (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} = (-1)^i \binom{n}{i}$$

donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{X+k}$.

Exercice 20. On effectue des divisions euclidiennes successives de $A = X^{11}$ par $B = X^2+X+1$. On trouve

$$A = BQ_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad Q_1 = X^9 - X^8 + X^6 - X^5 + X^3 - X^2 + 1 \quad \text{et} \quad R_1 = -X - 1,$$

$$Q_1 = BQ_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = X^7 - 2X^6 + X^5 + 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 3X - 6 \quad \text{et} \quad R_2 = 3X + 7,$$

$$Q_2 = BQ_3 + R_3 \quad \text{avec} \quad Q_3 = X^5 - 3X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 9X + 9 \quad \text{et} \quad R_3 = 3X - 15,$$

$$Q_3 = BQ_4 + R_4 \quad \text{avec} \quad Q_4 = X^3 - 4X^2 + 6X \quad \text{et} \quad R_4 = -15X + 9.$$

Il en découle $A = R_1 + BR_2 + B^2R_3 + B^3R_4 + B^4Q_4$.
Ainsi,

$$\frac{X^{11}}{(X^2+X+1)^4)} = \frac{A}{B^4} = Q_4 + \frac{R_1}{B^4} + \frac{R_2}{B^3} + \frac{R_3}{B^2} + \frac{R_4}{B}$$

d'où

$$\frac{X^{11}}{(X^2+X+1)^4)} = X^3 - 4X^2 + 6X - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^4} + \frac{3X+7}{(X^2+X+1)^3} + \frac{3X-15}{(X^2+X+1)^2} - \frac{15X-9}{X^2+X+1}.$$