17

Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

17.1 Structure d'espace vectoriel

17.1.1 Définition

Définition 1: Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative et commutative notée

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

vérifiant les axiomes suivants :

1. Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que pour tout $x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$;
2. $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$. On note $y = -x$.

On dit que le couple $(E, +)$ est un groupe commutatif.
On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il existe une loi externe notée

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

vérifiant :

1. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$;
2. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
3. $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
4. $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs et 0_E est appelé le vecteur nul de E. Les éléments du corps $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Remarque 1. • En pratique, on note λx plutôt que $\lambda \cdot x$.

• Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note $x - y$ plutôt que $x + (-y)$.

• Il y a unicité de l'élément neutre $0_E \in E$. En effet, supposons qu'il existe un autre élément neutre $0'_E$, on aurait $0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$ en utilisant successivement la neutralité de 0_E et de $0'_E$.

• L'inverse de x est en fait unique. En effet, supposons qu'il existe $(y,z) \in E^2$ tels que $x+y=y+x=x+z=z+x=0_E$.

Alors
$$y = y + 0_E = y + (x+z) = (y+x)+z = 0_E + z = z.$$

• Pour tout $x \in E, 0 \cdot x = 0_E$ puisque
$$0 \cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0 \cdot x$$
donc en ajoutant $-(0\cdot x)$ de part et d'autre, on obtient $0\cdot x = 0_E$.

• Pour tout $x \in E$, on a $(-1)\cdot x = -x$ puisque
$$0_E = 0\cdot x = (1+(-1))\cdot x = x + (-1)\cdot x.$$

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ puisque
$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$
donc en ajoutant $-(\lambda \cdot 0_E)$ de part et d'autre, on obtient $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

• Tout élément est simplifiable : si on a $x+y=x+z$, en ajoutant $-x$ de chaque côté, on obtient $y=z$.

Définition 2: Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ tout vecteur de E de la forme
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$
où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 2. En pratique, un espace vectoriel est un ensemble dans lequel on peut effectuer des combinaisons linéaires sur ses éléments.

Exemple 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
   En effet, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout couple de n-uplets $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a
   $$\lambda \cdot (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n) \in \mathbb{K}^n.$$
   Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $0_{\mathbb{K}^n} = (0,\dots,0)$.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{C}$ est le nombre complexe nul.
3. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ est la fonction nulle.
4. Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle $0_{n,p}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}_n[X]$ est le polynôme nul.
6. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de degré 1 ou 2 à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul d'un tel espace vectoriel est la fonction nulle.
7. L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0.
8. Plus généralement, si Ω est un ensemble et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble des fonctions de Ω vers E, noté E^Ω, est également un espace vectoriel.

17.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3: Sous-espaces vectoriels

Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $0_E \in F$;
2. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Remarque 3. • Il est équivalent de définir un sous-espace vectoriel F de E comme un sous-ensemble $F \subset E$ non vide tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $(x, y) \in F^2, \lambda x + y \in F$.

En effet, si F vérifie ces deux conditions, il existe un élément $x \in F$ et on a alors

$$(-1) \cdot x + x = -x + x = 0_E \in F.$$

En outre, soient $(x, y) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'une part, $\lambda x = \lambda x + 0_E \in F$ et $\mu y = \mu y + 0_E \in F$ donc $\lambda x + \mu y \in F$ puisque F est stable par somme.

• Un sous-espace vectoriel F de E devient un espace vectoriel en héritant de la loi interne de E et de la loi externe de $\mathbb{K}$.

En effet, par exemple, si $x \in F, -x \in F$ car $(-1).x + 1.0_E \in F$ par définition.

• Plus généralement, on peut montrer par récurrence que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par combinaisons linéaires, i.e

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall(x_1, \ldots, x_n) \in F^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F.$$

Exemple 2.
1. $\{0\}$ et E sont des sous-espaces triviaux de E.
2. $\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. L'ensemble $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
   En effet, $(0, 0) \in F$ puisque $2 \times 0 - 0 = 0$.
   De même, soient $(x, y) \in F, (x', y') \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   $$2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') = \lambda(2x - y) + \mu(2x' - y') = 0$$
   donc $\lambda(x, y) + \mu(x', y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in F$.
   Plus généralement, les droites du plan d'équation $ax+by+c = 0$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $c = 0$ (sinon, le vecteur nul $(0, 0)$ ne vérifie pas l'équation). On dit alors que ce sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   En effet, $(0, 0, 0) \in F$ puisque $2 \times 0 - 0 + 0 = 0$.
   De même, soient $(x, y, z) \in F, (x', y', z') \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   $$2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x - y + z) + \mu(2x' - y' + z') = 0$$
   donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \in F$.
   Plus généralement, les plans de l'espace d'équation $ax + by + cz + d = 0$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $d = 0$ (sinon, le vecteur nul $(0, 0, 0)$ ne vérifie pas l'équation). On dit alors que ce sont des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
   En effet, notons tout d'abord que $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$.
   De plus, si $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,
   $$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$$
   donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
6. L'ensemble des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) à cœfficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De même, les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et antisyémtriques respectivement sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. L'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 1: Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
Alors $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. • Pour tout $k \in [\![1, n]\!], 0_E \in F_k$ puisque F_k est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, $0_E \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k$.

• Soient $(x, y) \in \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)^2$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Puisque F_k est un sous-espace vectoriel de $E, \lambda x + \mu y \in F_k$.
Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \lambda x + \mu y \in F_k$ donc $\lambda x + \mu y \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k$.

On a donc bien montré que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exemple 3. Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + 5z = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2y = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ce sont des plans vectoriels de l'espace). Leur intersection $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et elle admet pour système d'équations cartésiennes
$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y + 5z & = & 0 \\ -x + 2y & = & 0 \end{array}\right.$$
On reconnaît un système d'équations cartésiennes qui définit une droite de l'espace, obtenue comme intersection de deux plans.

Remarque 4. En revanche, l'union de sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel.

En effet, soit $E = \mathbb{R}^2$, soit $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\right\}$.

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E mais $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisque $(1, 0) \in F \subset F \cup G, (0, 1) \in G \subset F \cup G$ mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

17.1.3 Sous-espace vectoriel engendré

Proposition 2: Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$, et noté $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ou $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, l'ensemble

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\},$$

c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires formées sur les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$.
En outre, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E à contenir la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. • Montrons tout d'abord que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

En prenant pour tout $1 \leqslant k \leqslant n, \lambda_k = 0$, on montre que $0_E \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Soient $(x, x') \in (\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n))^2$.

Il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad \text{et} \quad x' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k.$$

Ainsi, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lambda x + \lambda' x' = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \lambda_k + \lambda' \lambda'_k) x_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n),$$

ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Puisque F est stable par combinaisons linéaires, alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F$ donc $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$, ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E à contenir la famille $(x_1, \dots, x_n)$. ∎

Exemple 4. • $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

• Si x est un vecteur non nul de E, alors $\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est une droite vectorielle de E.

• Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{Vect}(x, y) = \left\{\lambda x + \mu y, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un plan vectoriel de base (x, y).

• Si $p \leqslant n, \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 5. Plus généralement, pour toute partie $A \subset E$, on définit $\mathrm{Vect}(A)$ comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A. C'est le plus petit-sous espace vectoriel de E qui contient A.

17.2 Familles libres, familles génératrices, bases

17.2.1 Familles libres

Définition 4: Famille libre

On appelle famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute famille $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E telle que

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée, i.e. la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E.$$

Remarque 6. • Une famille qui contient le vecteur nul n'est jamais libre. En effet, pour toute famille $(0_E, x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, on a

$$1 \times 0_E + 0 \times x_1 + \cdots + 0 \times x_n = 0_E$$

donc $\lambda_0 0_E + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ avec $(\lambda_0, \lambda_1, , \lambda_n) = (1, 0, \dots, 0)$.

• Si x est un vecteur non nul de E, alors la famille (x) est libre puisque $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$.

• Soient (x, y) une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Alors la famille (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires.

1. Supposons que la famille (x, y) est libre.
   S'il existe un réel λ tel que $x = \lambda y$ (loisible car $y \neq (0, 0)$ puisque la famille (x, y) est libre), alors $1 \times x - \lambda \times y = 0_E$, ce qui contredit la liberté de la famille (x, y).
2. Supposons que x et y ne soient pas colinéaires.
   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda x + \mu y = 0_E$.
   Supposons par exemple que $\lambda \neq 0$. On a alors $x = -\dfrac{\mu}{\lambda} y$ donc x et y sont colinéaires, ce qui est absurde. Nécessairement, $\lambda = 0$.
   Ainsi, $\mu y = 0_E$ et puisque x et y ne sont pas colinéaires, y ne peut pas être le vecteur nul donc $\mu = 0$, d'où $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, ce qui prouve la liberté de la famille (x, y).

• Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $p \leqslant n$. On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. Il existe alors des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0_E$.
Ainsi, en posant pour tout $k \in [\![p + 1, n]\!], \lambda_k = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
Ceci montre que toute famille contenant une sous-famille liée est liée.
Par contraposée, on obtient que toute sous-famille d'une famille libre est libre.

• Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

En effet, supposons que la famille est liée, i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$.

Par hypothèse, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$ donc $x_i = -\dfrac{1}{\lambda_i} \displaystyle\sum_{k \neq i} \lambda_k x_k$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = \displaystyle\sum_{k \neq i} \lambda_k x_k$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ en posant $\lambda_i = -1$. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$, ce qui prouve que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $x_{n+1} \in E$.
Alors la famille $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est libre si et seulement si $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. En effet, d'après la remarque précédente, si $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est libre, alors $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Réciproquement, supposons que $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrons que la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = 0_E$.

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $x_{n+1} = -\dfrac{1}{\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, $\lambda_{n+1} = 0$, et on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$, d'où pour tout $k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$ par liberté de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!], \lambda_k = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$. ■

Exemple 5. • Soient $x = (1, 1), y = (2, -1)$ et $z = (-6, 3)$. La famille (x, y) est libre tandis que la famille (y, z) est liée.

La famille (x, y, z) est donc liée puisqu'elle contient une sous-famille liée.

• La famille (x, y, z) avec $x = (1, 1, -1), y = (1, 2, 3)$ et $z = (-1, 1, 9)$ est liée puisque $z = 2x - 3y$ donc $2x - 3y + z = (0, 0, 0)$ est une combinaison linéaire nulle des vecteurs (x, y, z) à cœfficients non tous nuls.

• La famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$.

Pour $x = 0$, on obtient $\lambda = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = 0$ donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, ce qui prouve la liberté de la famille $(\cos, \sin)$.

• Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on considère la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie pour tout $(k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ par

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k} \delta_{j,l},$$

c'est à dire la matrice dont tous les cœfficients sont nuls, excepté le cœfficient en i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Alors la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille libre.

En effet, s'il existe des scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ tels que

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j} = 0,$$

alors la matrice $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}$ est la matrice nulle et ses cœfficients sont les $a_{i,j}$ donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} = 0$, ce qui prouve que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille libre.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille libre dans $\mathbb{K}[X]$.

En effet, soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$. Par unicité des cœfficients d'un polynôme (en l'occurence, du polynôme nul), on en déduit que pour tout $k \in [\![0,n]\!], a_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre.

Plus généralement, on peut montrer que toute famille de polynômes à degrés distincts est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 4: Unicité des cœfficients d'une combinaison linéaire d'une famille libre de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Supposons qu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k.$$

Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = \lambda'_k$.

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda'_k) x_k = 0_E.$$

Puisque la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = \lambda'_k$, d'où le résultat. ■

Remarque 7. Ceci justifie qu'on puisse identifier les cœfficients dans des expressions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\cos(x) + b\sin(x) = a'\cos(x) + b'\sin(x)$$

et conclure que $a = a'$ et $b = b'$.

De même, si pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, alors on peut conclure que pour tout $k \in [\![0,n]\!], a_k = b_k$.

17.2.2 Famille génératrice

Définition 5: Famille génératrice

On appelle famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute famille $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E telle que $\text{Vect}(x_1, ..., x_n) = E$.
On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ engendre l'espace vectoriel E.

Remarque 8. • Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E, il suffit de montrer que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

En effet, on a toujours $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset E$ donc il suffit de montrer que $E \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

• Si une famille de vecteurs de E contient une sous-famille de vecteurs qui engendre E, alors cette famille engendre elle aussi E.

En effet, soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

Supposons qu'il existe $p \leqslant n$ tel que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$.

Alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ donc $E \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui prouve que $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

• On a la même définition pour tout sous-espace vectoriel F de E. Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E, une famille génératrice de F est une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de F telle que $\text{Vect}(x_1, ..., x_n) = F$.

Exemple 6. • La famille $(\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ puisque pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ donc $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathbb{R}^2$.

• La famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ donc $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathbb{R}^3$.

• Soit D la droite du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$.

On a alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc

$$D = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci montre que $D = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

• Soit P le plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $3x - y + z = 0$.

On a alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow y = 3x + z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x + z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$P = \left\{ = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ceci montre que $P = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

• Soit D la droite de l'espace définie par le système d'équations cartésiennes

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y-z & = & 0 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -x+3y \\ x+4y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -x+3y \\ x & = & -4y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 7y \\ x & = & -4y \end{array}\right. .$$

On a alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \\ 7y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc

$$D = \left\{ y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci montre que $D = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

• Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ définie précédemment est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ puisque pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$$

donc $\operatorname{Vect}\{E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

donc $\operatorname{Vect}(1, X, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$.

17.2.3 Bases

Définition 6: Base

On dit qu'une famille $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 7. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ admet une base dite canonique constituée des vecteurs

$$e_1 = (1, 0 \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

• Reprenons l'exemple vu précédemment de la droite D du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $2x - y = 0$.

Une base de D est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Reprenons l'exemple vu précédemment du plan P de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $3x - y + z = 0$.

Une base de P est le couple de vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

• Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définie précédemment est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 1: Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit x un vecteur de E.
Alors il existe un unique n-uplet de scalaires $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Les scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E, i.e. $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$, $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, donc il existe des scalaires $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

En outre, puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, elle est a fortiori libre donc les scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ sont uniques comme démontré dans la Proposition 17.2.1. ■

Remarque 9. • En apppliquant les règles usuelles de calcul dans les espaces vectoriels, on obtient que pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

• Le résultat est en fait une équivalence, c'est à dire qu'une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme une unique combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrons la réciproque du résultat démontré dans le théorème ci-dessus.

On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Ceci signifie que $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ donc la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E.

Par ailleurs, si $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = 0_E = \sum_{k=1}^{n} 0 \times e_k$, par unicité de la combinaison linéaire, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!], x_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Finalement, $(e_1, \ldots, e_n)$ est bien une base de E.

Exemple 8. • Pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$, ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

• Soit P le plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $3x-y+z=0$. Le vecteur $\vec{u}=(1,1,-2)$ appartient à P et on a $\vec{u}=(1,3,0)-2(0,1,1)$ donc les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $((1,3,0),(0,1,1))$ sont $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$, les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.

Définition 7: Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.
Soient $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Pour tout $1\leqslant j\leqslant p$, on note $x_j=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}e_i$, où les $(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle matrice de la famille $(x_1,\dots,x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)=\begin{pmatrix}x_{1,1}&x_{1,2}&\dots&x_{1,p}\\x_{2,1}&x_{2,2}&\dots&x_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n,1}&x_{n,2}&\dots&x_{n,p}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où les colonnes sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x_j dans la base $\mathcal{B}$.

17.2.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 8: Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et G l'ensemble

$$F+G=\{x+y,(x,y)\in F\times G\}\subset E.$$

Remarque 10. • On a clairement $F\subset F+G$ et $G\subset F+G$.
• Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F+E=E$ et $F+\{0_E\}=F$.
• Si $F=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ et $G=\mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_p)$, alors $F+G=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)$.

Exemple 9. Si $E=\mathbb{K}[X],F=\mathrm{Vect}(X)$ et $G=\mathrm{Vect}(X^2,X^4)$, alors

$$F+G=\mathrm{Vect}(X,X^2,X^4)=\{aX^4+bX^2+cX,(a,b,c)\in\mathbb{K}^3\}.$$

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. • Tout d'abord, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $0_E\in F\cap G$ donc $0_E=\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}\in F+G$.

• Soient $(u,v) \in (F+G)^2$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

Par définition de $F+G$, il existe un couple $(x,y) \in F \times G$ tel que $u = x+y$ et un couple $(x',y') \in F \times G$ tel que $v = x'+y'$.

Ainsi, $\lambda u + \mu v = \lambda(x+y) + \mu(x'+y') = (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y')$.

Puisque $(x,x') \in F^2$ et que F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda x + \mu x' \in F$. De même, $\lambda y + \mu y' \in G$ donc $\lambda u + \mu v \in F+G$.

On a donc bien montré que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarque 11. • En fait, $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

En effet, puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a $F \cup G \subset F+G$. Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$ donc $\mathrm{Vect}(F \cup G) \subset F+G$.

Réciproquement, tout vecteur de $F+G$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $F \cup G$ donc $F+G \subset \mathrm{Vect}(F \cup G)$ d'où finalement l'égalité $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Ainsi, $F+G$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de F ou G.

• En conséquence, $F+G = F$ si et seulement si $G \subset F$.

Définition 9: Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F+G$ est directe si pour tout $u \in F+G$, il existe un unique couple $(x,y) \in F \times G$ tel que $u = x+y$.
Dans ce cas, on note $F+G = F \oplus G$.

Remarque 12. Autrement dit, $F+G = F \oplus G$ signifie que pour tout $(x,x') \in F^2$, pour tout $(y,y') \in G^2$,

$$x+y = x'+y' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' \\ y & = & y' \end{array} \right. .$$

Proposition 6: Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F+G = F \oplus G$;
2. $\forall (x,y) \in F \times G, (x+y = 0_E \Leftrightarrow x = y = 0_E)$;
3. $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. • Montrons (1) ⇒ (2). Supposons que (1) est vraie.

Soient $(x,y) \in F \times G$. Si $x = y = 0_E$, on a clairement $x+y = 0_E$.

Réciproquement, supposons que $x+y = 0_E$. On a alors

$$\underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$

donc par définition d'une somme directe, ceci implique que $x = y = 0_E$.

• Montrons (2) ⇒ (3). Supposons que (2) est vraie, et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F \cap G$.

Puisque $x \in G$ et que G est un sous-espace vectoriel de E, alors $-x \in G$ donc

$$\underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G} = 0_E.$$

D'après la propriété (2), ceci implique que $x = -x = 0_E$ donc $F \cap G \subset \{0_E\}$ et finalement, $F \cap G = \{0_E\}$.

• Montrons (3) $\Rightarrow$ (1).

Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que $F + G = F \oplus G$.

Soit $u \in F + G$. Supposons qu'il existe $(x, x') \in F^2, (y, y') \in G^2$ tel que $u = x + y = x' + y'$. Montrons que $x = x'$ et $y = y'$.

Par hypothèse, on a $x - x' = y' - y$. Puisque $(x, x') \in F^2$ et que F est un sous-espace vectoriel de E, alors $x - x' \in F$. De même, $y' - y \in G$.

Ainsi, $x - x' = y' - y \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $\begin{cases} x - x' & = & 0_E \\ y' - y & = & 0_E \end{cases}$, i.e. $x = x'$ et $y = y'$, ce qui prouve que la somme $F + G$ est directe.

■

Exemple 10. • Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $F = \text{Vect}(1, 2, 3)$ et $G = \text{Vect}(2, 1, 3)$.

Puisque $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$, on a $F + G = F \oplus G$.

• Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Soit $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \text{Vect}(1, X^2)$.

On a $F \cap G = \text{Vect}(X^2) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ donc la somme $F + G$ n'est pas directe.

Définition 10: Sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G.$$

Autrement dit, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $u = x + y$.

Exemple 11. • Soit $E = \mathbb{R}^3, F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $G = \text{Vect}(0, 0, 1)$. Alors $E = F \oplus G$.

• Soit $E = \mathbb{K}_3[X], F = \text{Vect}(1, X^2)$ et $G = \text{Vect}(X, X^3)$. Alors $E = F \oplus G$.

• Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 13. On peut avoir $F + G = E$ sans que F et G soient en somme directe.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^3$, que $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, on a $F + G = \mathbb{R}^3$ mais $F \cap G = \text{Vect}(1, 0, 0) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc F et G ne sont pas en somme directe.

17.3 Dimension d'un espace vectoriel

17.3.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 11: Espace vectoriel de dimension finie

On dit que le $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple 12. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

Théorème 2: Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$.
On peut extraire de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, i.e. quitte à renuméroter les e_i, il existe $p \leqslant n$ tel que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

Démonstration. • Si E est l'espace vectoriel nul, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, e_i = 0_E$.
Supposons dorénavant que $E \neq \{0_E\}$. A fortiori, il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $e_i \neq 0_E$.

• Si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, c'est une famille libre et génératrice de E, donc c'est une base de E.

• Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ n'est pas libre. Soit $p < n$ le cardinal de la plus grande sous-famille libre de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. (On sait que $p \geqslant 1$ puisque la famille contient au moins un vecteur non nul.)

Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. Montrons alors que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

On a clairement $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $i \in [\![p + 1, n]\!]$.

Par hypothèse, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_i)$ est liée (puisqu'elle contient $p + 1$ vecteurs) donc $e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ (en effet, puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, alors $(e_1, \dots, e_p, e_i)$ est libre si et seulement si $e_i \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$).

Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ contient donc tous les vecteurs e_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. Or, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est le plus petit-sous espace vectoriel de E à contenir tous les vecteurs e_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Finalement, on a donc bien $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est donc libre et génératrice dans E : c'est donc une base de E. ■

Remarque 14. • On vient donc de montrer le théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

• Une version plus générale est la suivante : si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E.

En effet, il suffit de rajouter des vecteurs de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans la famille libre $(x_i)_{i \in I}$ jusqu'à obtenir la plus grande famille libre possible et la preuve précédente montre que c'est alors une base de E.

Exemple 13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}\right)$ est liée puisque $\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille libre de plus grand cardinal possible incluse dans la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}\right)$ donc elle constitue une base de F et on a donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Corollaire 1: Existence de bases

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Démonstration. Par définition, un espace vectoriel de dimension finie admet une famille génératrice finie. D'après le théorème précédent, il admet donc une base. ■

17.3.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E.
Alors toute famille constituée de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Démonstration. Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

• Initialisation : pour $n = 1$. Supposons que $E = \mathrm{Vect}(e_1)$, où e_1 est un vecteur non nul de E.

Soient x et y deux vecteurs distincts de E.

Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $x = \lambda e_1$ et $y = \mu e_1$. Puisque les vecteurs x et y sont distincts, ils ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons sans perte de généralité que $x \neq 0_E$ donc $\lambda \neq 0$.

Ainsi, $y = \dfrac{\mu}{\lambda} x$ donc les vecteurs x et y sont liés.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que si un espace vectoriel admet une famille génératrice à n éléments, alors toute famille constituée de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Montrons la propriété au rang $n+1$. Supposons que $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1})$. Soit $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ une famille de $n+2$ éléments de E. Montrons que la famille $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ est liée.

Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n+2$, il existe des scalaires $(x_{1,j}, \ldots, x_{n+1,j}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$x_j = \sum_{i=1}^{n+1} x_{i,j} e_i.$$

Si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n+2, x_{n+1,j} = 0$, alors pour tout $1 \leqslant j \leqslant n+2, x_j \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ donc par hypothèse de récurrence, les vecteurs $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ sont liés.

Supposons dorénavant qu'il existe $j \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $x_{n+1,j} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs x_j, on peut supposer que $x_{n+1,1} \neq 0$.

Posons pour tout $2 \leqslant j \leqslant n+2, y_j = x_j - \dfrac{x_{n+1,j}}{x_{n+1,1}} x_1$.

Alors, pour tout $2 \leqslant j \leqslant n+2, y_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

La famille $(y_2, \ldots, y_{n+2})$ est donc constituée de $n+1$ vecteurs appartenant à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Par hypothèse de récurrence, les vecteurs $(y_2, \ldots, y_{n+2})$ sont liés donc il existe des scalaires $(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que

$$\sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j y_j = 0_E \Leftrightarrow \sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j \left(x_j - \frac{x_{n+1,j}}{x_{n+1,1}} x_1 \right) = 0_E \Leftrightarrow -\left(\sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j \frac{x_{n+1,j}}{x_{n+1,1}} \right) x_1 + \sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j x_j = 0_E.$$

C'est une combinaison linéaire nulle des vecteurs $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ à cœfficients non tous nuls puisque $(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}) \neq (0, \ldots, 0)$. Ainsi, la famille $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ est liée, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

Remarque 15. • A fortiori, si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$, toute famille de vecteurs de E constituée de plus de $n+1$ vecteurs est liée.

• Par contraposée, on en déduit que si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$, et si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre de E, alors $p \leqslant n$. Moralement, une famille libre a toujours moins de vecteurs qu'une famille génératrice.

Corollaire 2: Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont même cardinal, et ce nombre s'appelle la dimension de E. On le note $\dim(E)$.

Démonstration. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ deux bases de E.
Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et $\mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_p) = E$, alors $n \leqslant p$.
De même, puisque la famille $(e'_1, \ldots, e'_p)$ est libre et $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$, alors $p \leqslant n$.
Finalement, on a bien $p = n$ donc toutes les bases de E ont même cardinal. ∎

Exemple 14. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n puisqu'il admet comme base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

• $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 puisqu'il admet comme base $(1, i)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$ puisqu'il admet comme base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

• Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np puisqu'il admet comme base canonique les matrices $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

• L'espace vectoriel réel des solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ (resp. $y'' + 3y' + 3y = 0$) est de dimension 1 (resp. 2).

• L'espace vectoriel des suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 4: Cardinal d'une famille libre et d'une famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Démonstration.

1. E admet une famille génératrice à n éléments, donc d'après le théorème 17.3.2 toute famille constituée de plus de $n + 1$ éléments est liée. Par contraposée, toute famille libre de E a au plus n éléments.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille génératrice de E. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on déduit du théorème 17.3.2 que $n \leqslant p$ donc toute famille génératrice a au moins n éléments.

∎

17.3.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 5: Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E.
Alors :

1. Si $p = n, (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
2. Si $p < n$, il existe des vecteurs $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Démonstration.

1. On suppose que $p = n$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, avec $\dim(E) = n$. Montrons que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

   On a toujours $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset E$. Montrons que $E \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   Soit $x \in E$.

   Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ contient $n+1$ vecteurs de E qui est un espace vectoriel de dimension n, c'est une famille liée. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ est liée si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On en conclut que $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ d'où l'inclusion $E \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   On a donc bien prouvé que $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   Finalement, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre et génératrice de E : c'est donc une base de E.

2. Supposons que $p < n$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ ne peut donc pas être une base de E. Puisque c'est une famille libre, elle n'est donc pas génératrice, i.e. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \neq E$.

   Il existe donc un vecteur $e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre, on sait que la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est libre.

   Si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = E$ (possible si $n = p + 1$), la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est alors libre et génératrice, donc c'est une base de E. Sinon, il existe $e_{p+2} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1})$ et par le même argument que précédemment, la famille $(e_1, \dots, e_{p+2})$ est libre.

   On réitère ce procédé jusqu'à avoir trouvé des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tels que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. On aura donc obtenu une famille libre à n éléments dans un espace vectoriel de dimension n : c'en est donc une base d'après le premier alinéa.

$\blacksquare$

Remarque 16. • Autrement dit, une famille libre de vecteurs de E peut toujours se compléter en une base de E.

• Deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

• Trois vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$.

• Plus généralement, il faut retenir le résultat suivant : dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre contenant n vecteurs est une base.

Corollaire 3: Base de polynômes à degrés échelonnés

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $(P_0, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}_n[X])^{n+1}$ une famille de polynômes à degrés échelonnés, i.e. pour tout $k \in [\![0, n]\!], \deg(P_k) = k$.
Alors $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration. Montrons que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{K}[x]}$. Puisque les degrés sont échelonnés, si $\lambda_n \neq 0$, le cœfficient dominant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ serait $\lambda_n a_n \neq 0$, où a_n est le cœfficient dominant de P_n. Ainsi, on aurait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, ce qui est absurde. Nécessairement, $\lambda_n = 0$, puis par une récurrence descendante, on montre successivement que $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$.

Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre consituée de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, qui est de dimension $n + 1$: c'en est donc une base. $\blacksquare$

Exemple 15. La famille $(2, X-1, X^2+3X+2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 4: Formule de Taylor polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Soit $a \in \mathbb{K}$.
Alors
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P.

Démonstration. D'après le corollaire précédent, la famille $((X-a)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque c'est une famille de polynômes à degrés échelonnés.

Ainsi, il existe des coordonnées $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telles que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a alors
$$P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} \lambda_k \frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k-i}.$$

En évaluant en a, on obtient pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P^{(i)}(a) = \lambda_i i!$ donc $\lambda_i = \dfrac{P^{(i)}(a)}{i!}$.

Ainsi, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. ■

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.
Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Démonstration. Il suffit de montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Supposons par l'absurde qu'elle ne l'est pas. D'après le théorème 17.3.1, on peut extraire de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ une sous-famille $(e_1, \dots, e_p)$ de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ (quitte à les renuméroter) avec $p < n$ telle que $(e_1, \dots, e_p)$ forme une base de E.

On a donc une base de E qui contient p éléments avec $p < n = \dim(E)$. Or, toute base de E doit contenir n éléments. C'est donc une absurdité.

Nécessairement, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et puisqu'elle est génératrice de E, c'est une base de E. ■

Remarque 17. Autrement dit, une famille génératrice d'un espace vectoriel dont le cardinal est égal à la dimension de l'espace est une base de l'espace.

Exemple 16. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x+y-z=0$.

On a $(x,y,z) \in P \Leftrightarrow z = 2x+y \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,2x+y) = x(1,0,2) + y(0,1,1)$.

Ainsi, les vecteurs $(1,0,2)$ et $(0,1,1)$ engendrent P donc $P = \text{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$.

Puisque $\dim(P) = 2$, d'après le théorème précédent, les vecteurs $(1,0,2)$ et $(0,1,1)$ forment une base de P.

Théorème 7: Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration.
Soit $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

1. • Si $F = \{0\}, \dim(F) = 0$.
   • Supposons que $F \neq \{0\}$. Il s'agit de montrer que F possède une famille génératrice finie.
   Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F. (On a nécessairement $p \leqslant n$, puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E, puisque $F \subset E$.)
   Si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre F et alors F est de dimension finie.
   Si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \neq F$, alors il existe $e_{p+1} \in F$ tel que $e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. On a alors montré précédemment que la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est libre.
   Si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = F$, on a fini. Sinon on réitère le procédé et on trouve un vecteur $e_{p+2} \in F$ tel que $(e_1, \dots, e_{p+2})$ est libre.
   Le procédé s'arrête forcément à un moment puisque $F \subset E$ et que E est de dimension finie égale à n donc toute famille libre de F, qui est une famille libre de E, admet au plus n éléments.
   Il existe donc nécessairement un entier $q \in [\![p, n]\!]$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_q)$ est libre et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q) = F$.
   La famille $(e_1, \dots, e_q)$ est alors une famille libre et génératrice de F : c'est donc une base de F et on a $\dim(F) = q \leqslant n = \dim(E)$.
2. • Si $E = F$, il est clair que $\dim(E) = \dim(F)$.
   • Supposons que $\dim(F) = \dim(E) = n$ et montrons que $E = F$.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F, i.e. $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de F et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = F$.
   Puisque $F \subset E$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E à n éléments, c'est donc une base de E, a fortiori, une famille génératrice de E.
   Ainsi, $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = F$.

■

Remarque 18. En pratique, on utilise très souvent ce théorème pour montrer que deux espaces vectoriels E et F sont égaux. Pour cela, il suffit de vérifier que $F \subset E$ (ou $E \subset F$) et que $\dim(E) = \dim(F)$.

17.3.4 Dimension d'une somme de deux sous-espaces

Proposition 7: Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = F \oplus G$.
Soient $n = \dim(F)$ et $p = \dim(G)$. Soient $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ des bases de F et G respectivement.
Alors la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $F \oplus G$.
On dit que la base $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration.

• On a déjà vu que $F+G = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ donc la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$.

• Montrons que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est libre.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^{p} \mu_k g_k = 0_E$.

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \in F$, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mu_k g_k \in G$ et que la somme $F+G$ est directe, on sait que ceci implique que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k g_k = 0_E$. Par liberté des familles $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p)$, ceci implique que pour tout $k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!], \mu_k = 0$ donc la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est libre.

On a donc bien montré que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $F \oplus G$. Il en découle que $\dim(F \oplus G) = n + p = \dim(F) + \dim(G)$. ■

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration. Posons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F) \leqslant n = \dim(E)$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ tels que $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ est une base de E.

Posons $G = \mathrm{Vect}(f_{p+1}, \dots, f_n)$ et montrons que $F \oplus G = E$.

• Tout d'abord, on a bien $F + G = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n) = E$ puisque la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E.

• Montrons que $F + G = F \oplus G$. Pour cela, considérons $(x, y) \in F \times G$ tels que $x + y = 0_E$ et montrons que $x = y = 0_E$.

Il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k f_k$.

Ainsi, $0_E = x + y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$. Puisque la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$ donc $x = y = 0_E$, ce qui prouve que la somme est directe.

Finalement, on a bien $F \oplus G = E$. ■

Remarque 19. Cette propriété se résume ainsi : tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Mais ce supplémentaire n'est pas unique.

Exemple 17. Soit $E = \mathbb{R}^2, F = \mathrm{Vect}(1, 0), G = \mathrm{Vect}(0, 1)$ et $H = \mathrm{Vect}(1, 1)$.

Alors $E = F \oplus G = F \oplus H$.

Théorème 8: Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Remarque 20. Dans le cas particulier où F et G sont en somme directe, on retrouve le résultat du théorème précédent.

Démonstration. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G de telle sorte qu'on ait

$$G = (F \cap G) \oplus H.$$

Alors on a $F + G = F + H$. Montrons cette égalité par double inclusion.

On a $H \subset G$ par définition donc l'inclusion $F + H \subset F + G$ est évidente.

Réciproquement, soit $x \in F + G$. Alors il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Or $G = F \cap G \oplus H$ donc il existe $y_F \in F \cap G$ (donc a fortiori $y_F \in F$) et $y_H \in H$ tels que $x_G = y_F + y_H$. Ainsi, $x = (x_F + y_F) + y_H$ avec $x_F + y_F \in F$ et $y_H \in H$ donc $x \in F + H$, ce qui montre l'inclusion $F + G \subset F + H$. Ainsi, $F + G = F + H$.

Montrons maintenant que la somme $F + H$ est directe. Pour cela, il suffit de montrer que $F \cap H = 0$.

Puisque $H \subset G, H = H \cap G$ donc $F \cap H = F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H = 0$ puisque H et $F \cap G$ sont en somme directe. Finalement, on a

$$\begin{cases} G = (F \cap G) \oplus H \\ F + G = F \oplus H. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} \dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(H) \\ \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(H) \end{cases}$$

d'où $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F + G) - \dim(F)$, i.e.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

■

Exemple 18. Soit $E = \mathbb{R}^3, F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$.

On a $F + G = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \mathrm{Vect}(1,0,0)$.

On a alors $\dim(F+G) = 3$ et $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$. On retrouve bien la formule de Grassmann.

Corollaire 5: Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si $\begin{cases} F + G & = & E \\ \dim(F) + \dim(G) & = & \dim(E) \end{cases}$.

Démonstration. • Supposons que F et G sont supplémentaires, i.e. $F \oplus G = E$. On a alors bien $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \oplus G) = \dim(E)$.

• Supposons que $\begin{cases} F + G & = & E \\ \dim(F) + \dim(G) & = & \dim(E) \end{cases}$.

D'après la formule de Grassmann, on a alors

$$\dim(E) = \dim(F+G) = \underbrace{\dim(F) + \dim(G)}_{\dim(E)} - \dim(F \cap G) = \dim(E) - \dim(F \cap G)$$

donc $\dim(F \cap G) = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$, ce qui prouve que F et G sont en somme directe. On a donc bien $F \oplus G = F + G = E$, i.e. F et G sont supplémentaires. ■

17.3.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 12: Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, et on note $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim\left(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)\right).$$

Exemple 19. Soit $x_1 = (1, 3, 2), x_2 = (0, 2, 1), x_3 = (-1, 1, 0)$.

On a $x_3 = 2x_2 - x_1$ donc la famille (x_1, x_2, x_3) est liée. On constate que les vecteurs x_1 et x_2 sont libres donc (x_1, x_2) est une base de $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$ et $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = \text{Vect}(x_1, x_2)$.

Ainsi, $\dim(\text{Vect}(x_1, x_2, x_3)) = 2$ donc la famille (x_1, x_2, x_3) est de rang 2.