

Liste d'exercices n°18

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

Si oui, donner la dimension de leur noyau et de leur image.

$$1. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+1, y) \end{matrix}$$

$$6. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+7y, xy, 2x-y) \end{matrix}$$

$$2. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y, x+3y, x) \end{matrix}$$

$$7. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{matrix}$$

$$3. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (|x|-x, |y|-y) \end{matrix}$$

$$8. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2, 0) \end{matrix}$$

$$4. f : \begin{matrix} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y, z) & \longmapsto & z-y \end{matrix}$$

$$9. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x-y, y+5z, y) \end{matrix}$$

$$5. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 1, y) \end{matrix}$$

$$10. f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (a^2x-y, y, 0) \end{matrix}$$

avec a un réel.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 3. On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et f, g les endomorphismes de E définis par : $f(y) = y' - 2y$, $g(y) = -y' + 3y$.

On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 5y' + 6y = 0_E. \quad (E)$$

1. Montrer que $\text{Ker}(f \circ g)$ est l'ensemble des solutions réelles de l'équation (E) .
2. Montrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ sont des sous-espaces vectoriels de $\text{Ker}(f \circ g)$ puis, à l'aide de la relation $f(y) + g(y) = y$: $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker } f$, une base de $\text{Ker } g$, puis l'ensemble des solutions réelles de (E) .

Exercice 4. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) \subset \ker(f) \Leftrightarrow \ker(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_F\}$.
2. Montrer que $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f) \Leftrightarrow \ker(g) + \text{Im}(f) = F$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E .

1. On suppose dans cette question que f et g commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g , i.e. $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$ et $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que si f est un projecteur, alors la réciproque est vraie.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists f \in \mathcal{L}(E), \text{ telle que } \ker(f) = F \text{ et } \operatorname{Im}(f) = G \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n.$$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
 (b) Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ et que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ pour tout $k \geq p$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
 (b) Vérifier que pour le même entier p trouvé en 1.(b), $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$ et que pour tout $k \geq p$, $\operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^p)$.
3. Montrer que $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2).$$

Ces équivalences sont-elles encore vraies si E est de dimension infinie ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\ker(f) = \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E), f \circ h + h \circ f = \operatorname{Id}_E.$$

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ stable par f . Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset P$. Peut-on avoir $\operatorname{Im}(f) = P$?

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E .
 Montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ si et seulement si f et g sont proportionnelles, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \lambda f$.
2. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$. Soit ϕ une forme linéaire sur E telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\phi((X - a)P) = 0$.
 Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $P \in E$, $\phi(P) = \lambda P(a)$.