

Exercice 1 : Polynômes de Tchebychev

1. Par définition de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X)$ donc $T_2(X) = 2X^2 - 1$.

De même, $T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 2X - X$ donc $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

Puis, $T_4(X) = 2XT_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1$ donc $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

Enfin,

$$T_5(X) = 2XT_4(X) - T_3(X) = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X) = 16X^5 - 16X^3 + 2X - 4X^3 + 3X$$

$$\text{donc } T_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

2. Montrons par une récurrence de pas double sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n , son coefficient dominant est 2^{n-1} , T_n a la parité de n (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$) et $T_n(1) = 1$.

- Pour $n = 0$, $T_0(X) = 1$ donc T_0 est bien de degré 0, son coefficient dominant est 1, T_0 est pair et $T_0(1) = 1$.

- Pour $n = 1$, $T_1(X) = X$ donc T_1 est de degré 1, son coefficient dominant est $1 = 2^{1-1}$, est impair et $T_1(1) = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que toutes ces propriétés sont vraies pour les polynômes T_n et T_{n+1} . Montrons qu'elles restent vraies pour le polynôme T_{n+2} .

On a $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

Par hypothèse de récurrence, T_{n+1} est de degré $n+1$ et T_n est de degré n donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$, ce qui implique que $2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ est de degré $n+2$, donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est le coefficient dominant de T_{n+1} multiplié par 2, c'est à dire $2 \times 2^{n+1-1} = 2^{n+1} = 2^{n+2-1}$.

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence, on a $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$ donc

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) = (-1)^{n+2} 2XT_{n+1}(X) + (-1)^{n+1} T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2} (2XT_{n+1}(X) - T_n(X)) \end{aligned}$$

d'où $T_{n+2}(-X) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(X)$, ce qui prouve que T_{n+2} a la parité de $n+2$.

Enfin, par hypothèse de récurrence, $T_{n+1}(1) = T_n(1) = 1$ donc

$$T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1) = 2 - 1 = 1,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$.

- Pour $n = 0$, $T_0(\cos(\alpha)) = 1 = \cos(0 \times \alpha)$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

- Pour $n = 1$, $T_1(\cos(\alpha)) = \cos(\alpha) = \cos(1 \times \alpha)$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$ et $T_{n+1}(\cos(\alpha)) = \cos((n+1)\alpha)$. Montrons que $T_{n+2}(\alpha) = \cos((n+2)\alpha)$.

On a

$$T_{n+2}(\cos(\alpha)) = 2 \cos(\alpha) T_{n+1}(\cos(\alpha)) - T_n(\cos(\alpha)) = 2 \cos(\alpha) \cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha).$$

Or, $\cos((n+2)\alpha) = \cos((n+1)\alpha + \alpha) = \cos((n+1)\alpha) \cos(\alpha) - \sin((n+1)\alpha) \sin(\alpha)$ et $\cos(n\alpha) = \cos((n+1)\alpha - \alpha) = \cos((n+1)\alpha) \cos(\alpha) + \sin((n+1)\alpha) \sin(\alpha)$ d'où $\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2 \cos(\alpha) \cos((n+1)\alpha)$. On en déduit que

$$T_{n+2}(\cos(\alpha)) = 2 \cos(\alpha) \cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } \alpha \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha).}$

4. Soit $n \geq 1$. Soient $(i, j) \in ([0, n-1])^2$ avec $i \neq j$.

Alors $\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} - \frac{j\pi}{n} = \frac{\pi}{n}(i-j) \neq 0$ donc $\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}$.

D'autre part, puisque $0 \leq i \leq n-1$, alors $0 \leq \frac{i}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ donc

$$0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2n} + \pi - \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi.$$

Ainsi, $\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n} \in]0, \pi[$ et $\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n} \in]0, \pi[$.

Puisque la fonction cosinus est injective sur $]0, \pi[$ et puisque $\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}$, on en déduit que $x_i = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n}\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}\right) = x_j$.

Les réels $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [0, n-1]$ sont donc bien n réels distincts dans $] -1, 1[$ (puisque $\cos([0, \pi]) =] -1, 1[$).

D'autre part, pour tout $k \in [0, n]$, on a

$$T_n(x_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Ainsi, T_n admet (au moins) n racines distinctes dans $] -1, 1[$ que sont les x_k , pour $k \in [0, n]$.

Or, le polynôme T_n est de degré n donc il a au plus n racines.

Le polynôme T_n admet exactement n racines distinctes que sont les $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [0, n]$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : \begin{matrix}]0, \pi[& \xrightarrow{\quad \mathbb{R} \quad} \\ \alpha & \mapsto T_n(\cos(\alpha)) - \cos(n\alpha). \end{matrix}$

D'après la question 3, la fonction f_n est identiquement nulle sur $]0, \pi[$ donc elle y est dérivable de dérivée nulle.

On en déduit que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, $-\sin(\alpha)T'_n(\cos(\alpha)) + n \sin(n\alpha) = 0$, d'où $\sin(\alpha)T'_n(\cos(\alpha)) = n \sin(n\alpha)$.

Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, $\sin(\alpha) \neq 0$, donc

$$\text{pour tout } \alpha \in]0, \pi[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, T'_n(\cos(\alpha)) = n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

- (b) Soit $n \geq 2$. Pour tout $x \in]1, 1[$, il existe un unique $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\alpha)$. Chercher les $x \in]-1, 1[$ tels que $T'_n(x) = 0$ revient donc à chercher les $\alpha \in]0, \pi[$ tels que $T'_n(\cos(\alpha)) = 0$.

D'après la question précédente, puisque pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, $\sin(\alpha) > 0$, on a

$$T'_n(\cos(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \sin(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha = \frac{k\pi}{n}.$$

En ces points, T'_n change de signe donc ce sont bien des extrema et

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

De plus, $T_n\left(\cos\left(0 \times \frac{\pi}{n}\right)\right) = T_n(\cos(0)) = T_n(1) = 1 = (-1)^0$ et

$$T_n\left(\cos\left(n \times \frac{\pi}{n}\right)\right) = T_n(\cos(\pi)) = T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n.$$

Par ailleurs, on sait que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| \leq 1$ car pour tout réel α , $T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$. Les bornes de T_n sur $[-1, 1]$ sont donc atteintes et on en déduit que

les extrema de T_n sur $[-1, 1]$ sont atteints en $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et valent $(-1)^k$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $g_n : \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & T'_n(\cos(\alpha)) - n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}. \end{array}$

D'après la question 5.a, la fonction g_n est nulle sur $]0, \pi[$ et est donc dérivable sur $]0, \pi[$ de dérivée nulle. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$,

$$g'_n(\alpha) = -\sin(\alpha)T''_n(\cos(\alpha)) - n \frac{n \cos(n\alpha) \sin(\alpha) - \sin(n\alpha) \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = 0$$

d'où

$$T''_n(\cos(\alpha)) = \frac{n \sin(n\alpha) \cos(\alpha) - n^2 \cos(n\alpha) \sin(\alpha)}{\sin^3(\alpha)}.$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} & (1 - \cos^2(\alpha))T''_n(\cos(\alpha)) - \cos(\alpha)T'_n(\cos(\alpha)) + n^2 T_n(\cos(\alpha)) \\ &= \sin^2(\alpha)T''_n(\cos(\alpha)) - \frac{n \cos(\alpha) \sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + n^2 \cos(n\alpha) \\ &= \frac{n \sin(n\alpha) \cos(\alpha) - n^2 \cos(n\alpha) \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{n \cos(\alpha) \sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + n^2 \cos(n\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Il existe un unique $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\alpha)$ donc

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = (1-\cos^2(\alpha))T''_n(\cos(\alpha)) - \cos(\alpha)T'_n(\cos(\alpha)) + n^2 T_n(\cos(\alpha)) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0$ donc le polynôme $(1-X^2)T''_n(X) - XT'_n(X) + n^2 T_n(X)$ admet une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

On en déduit que $\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0.$

Exercice 2 : Théorème de d'Alembert-Gauss

1. Notons que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$.

La partie $\mathcal{A}$ est non vide car elle contient $|P(0)|$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq 0$ donc $\mathcal{A}$ est minorée par 0. Ainsi, c'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure.

2. Soit $r > 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$. On a d'après la deuxième inégalité triangulaire :

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|.$$

On a d'une part $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n = |a_n| r^n$. D'autre part, d'après la première inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k$$

et on obtient bien $|P(z)| \geq |a_n| r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k$.

3. Soit $r > 0$. On a

$$|a_n| r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k = r^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^{k-n} \right).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k-n < 0$ donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} |a_k| r^{k-n} = 0$ et on en déduit que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^{k-n} = |a_n|.$$

Puisque a_n est le coefficient dominant de P et que P n'est pas le polynôme nul, on a nécessairement $a_n \neq 0$ donc $|a_n| > 0$.

Par produit de limites, on en conclut que $\lim_{r \rightarrow +\infty} |a_n| r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^{k-n} \right) = +\infty$.

Nécessairement, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $r \geq M$, $r^n |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \geq \alpha + 1$.

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $r \geq M$, si $|z| = r$, alors

$$|P(z)| \geq r^n |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \geq \alpha + 1.$$

On en conclut qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq M \Rightarrow |P(z)| \geq \alpha + 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par caractérisation de la borne inférieure, il existe $a_n \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha \leq a_n < \alpha + \frac{1}{n}$, i.e.

il existe $u_n \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \leq |P(u_n)| < \alpha + \frac{1}{n}$.

On a donc bien trouvé une suite $(u_n)_{n>0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq |P(u_n)| < \alpha + \frac{1}{n}$.

5. D'après la question précédente, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|P(u_n)| < \alpha + \frac{1}{n} \leq \alpha + 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|P(u_n)| < \alpha + 1$.

S'il existait un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n| \geq M$, on aurait d'après la question 3, $|P(u_n)| \geq \alpha + 1$, ce qui contredit la définition de la suite $(u_n)_{n>0}$.

Il en découle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| < M$ donc la suite $(u_n)_{n>0}$ est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en déduit que

la suite $(u_n)_{n>0}$ admet une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n>0}$.

6. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \leq |P(u_n)| < \alpha + \frac{1}{n}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(u_n)| = \alpha$.

Puisque $(|P(u_{\varphi(n)})|)_{n>0}$ est une sous-suite de $(|P(u_n)|)_{n>0}$, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(u_{\varphi(n)})| = \alpha$.

Or, par construction, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n>0}$ converge vers z_0 . Par continuité de la fonction $|P|$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(u_{\varphi(n)})| = |P(z_0)|$.

Enfin, par unicité de la limite, on en conclut que $|P(z_0)| = \alpha$.

7. D'après la question précédente, on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| = \frac{|P(z + z_0)|}{|P(z_0)|} \geq 1$ donc 1 est un minorant de $\{|Q(z)|, z \in \mathbb{C}\}$.

Par ailleurs, $|Q(0)| = \frac{|P(z_0)|}{|P(z_0)|} = 1$. Puisque 1 est un minorant de $\{|Q(z)|, z \in \mathbb{C}\}$ et que c'est également un élément de cet ensemble, on en conclut que $\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$.

8. Puisque P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P(X + z_0)$ est également de degré n (par composition). De plus, puisque $P(z_0) \neq 0$, on peut alors affirmer que $Q = \frac{P(X + z_0)}{P(z_0)}$ est un polynôme de degré n . Ainsi, il existe des complexes $(q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que

$$Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k.$$

On a $q_0 = Q(0) = \frac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$.

Puisque Q est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \neq 0$. En particulier, l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_k \neq 0\}$ est non vide.

Soit $d = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_k \neq 0\}$. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, $q_k = 0$. En posant $b_d =$

$-q_d \neq 0$ et $b_k = q_k$ pour tout $k \in \llbracket d+1, n \rrbracket$, on obtient bien $Q = 1 - b_d X^d + \sum_{k=d+1}^n b_k X^k$, avec $b_d \neq 0$.

9. Soit $r > 0$. Posons $z = r e^{i \frac{\theta}{d}}$. On a alors $z^d = r^d e^{i\theta}$ et pour tout $k \in \llbracket d+1 \rrbracket n$, $|z|^k = r^k$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|Q(z)| \leq |1 - b_d z^d| + \sum_{k=d+1}^n |b_k| |z|^k = |1 - \rho r^d| + \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^k.$$

Puisque $\lim_{r \rightarrow 0} \rho r^d = 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, $\rho r^d \leq 1$ d'où $1 - \rho r^d \geq 0$.

On obtient alors pour tout $r \leq r_0$,

$$|Q(r e^{i \frac{\theta}{d}})| \leq 1 - \rho r^d + \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^k$$

$$\text{d'où } \boxed{\exists r_0 > 0, \forall r \leq r_0, |Q(re^{i\frac{\theta}{d}})| - 1 \leq -\rho r^d + \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^k.}$$

$$10. \text{ Pour tout } r \leq r_0, \text{ on a } -\rho r^d + \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^k = r^d \left(-\rho + \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^{k-d} \right).$$

Puisque pour tout $k \in \llbracket d+1, n \rrbracket, k-d > 0$, on a $\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^{k-d} = 0$. En particulier,

$$\text{il existe } r_1 > 0, \text{ avec } r_1 \leq r_0, \text{ tel que pour tout } 0 < r \leq r_1, \sum_{k=d+1}^n |b_k| r^{k-d} \leq \frac{\rho}{2}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } 0 < r \leq r_1, |Q(re^{i\frac{\theta}{d}})| - 1 \leq r^d \left(-\rho + \frac{\rho}{2} \right) = -\frac{r^d \rho}{2} < 0.$$

On en déduit que pour tout $0 < r \leq r_1, |Q(re^{i\frac{\theta}{d}})| < 1 = \inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)|$, ce qui est absurde.

Il était donc absurde de supposer que $|P(z_0)| > 0$. On en conclut que $|P(z_0)| = 0$, i.e. $P(z_0) = 0$, ce qui prouve que $\boxed{P \text{ admet au moins une racine dans } \mathbb{C}.}$