

Corrigé de la liste d'exercices n°17

Espaces vectoriels

Exercice 1

1. $0 \notin F$ donc F n'est ni un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, ni un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
2. $F = \{x(2, 1, -1) + y(3, 0, 1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(2, 1, -1), (3, 0, 1)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ mais ce n'est pas un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ (car $(2, 1, -1) \in F$ mais $i(2, 1, -1) \notin F$).
3. $(2, 1, 0) \in F, (-2, 1, 0) \in F$ mais $(2, 1, 0) + (-2, 1, 0) = (0, 2, 0) \notin F$ donc F n'est pas un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. $(1, 0, 1) \in F, (0, 1, 1) \in F$ mais $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2) \notin F$ donc F n'est pas un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -x\} = \{(x, y, z) = (x, y, -x) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. $F = \{x(1+i), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{1+i\}$ donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
En revanche, ce n'est pas un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ car $1+i \in F$ mais $i(1+i) = -1+i \notin F$.
7. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(-1, 1, 0) \in F$ mais $2(-1, 1, 0) = (-2, 2, 0) \notin F$.
8. $F = \{x(0, 1) + y(3, 0) + z(2, 0) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{(0, 1), (3, 0), (2, 0)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (mais pas un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ car $i(0, 1) \notin F$).
9. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0, 0, 0) \notin F$.
10. $F = \{(x, y, x+y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (mais n'est pas un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ car $i((1, 0, 1)) \notin F$).
11. Montrons que F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
Tout d'abord, $F \neq \emptyset$ car $0 \in F$.
Ensuite, soient $(z_1, z_2) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons que $\lambda z_1 + \mu z_2 \in F$. On a

$$\begin{aligned} i(\lambda z_1 + \mu z_2) + \overline{\lambda z_1 + \mu z_2} &= i\lambda z_1 + i\mu z_2 + \lambda \overline{z_1} + \mu \overline{z_2} \quad \text{car } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \lambda(i z_1 + \overline{z_1}) + \mu(i z_2 + \overline{z_2}) \\ &= 0 \quad \text{car } (z_1, z_2) \in F^2 \end{aligned}$$

donc F est bien un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

En revanche, F n'est pas un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

En effet, $1+i \in F$ (car $i(1+i) + \overline{1+i} = i - 1 + 1 - i = 0$) mais $i(1+i) = -1+i \notin F$ (car $i(-1+i) + \overline{-1+i} = -i - 1 - 1 - i = -2 - 2i \neq 0$).

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z = x + iy\} \\ &= \{(x, y, x + iy) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, i) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, i)\} \end{aligned}$$

donc F est bien un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

2. (a) On a $1 + i(-i) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ donc $e \in F$.

De même, $1 + i(-2i) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ donc $f \in F$.

(b) Le vecteur u est bien combinaison linéaire de e et f car $u = 2e - f$. Il est également combinaison linéaire des vecteurs v et w car $u = v - w$.

(c) D'après la première question la famille $((1, 0, 1), (0, 1, i))$ est une famille génératrice de F . Or, elle est également libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de F et on en déduit que $\dim(F) = 2$.

Les vecteurs e et f étant libres, on en déduit que $\dim(\text{Vect}\{e, f\}) = 2$. Or, puisque $(e, f) \in F^2$, $\text{Vect}\{e, f\} \subset F$ donc par égalité des dimensions, on en déduit que $\text{Vect}\{e, f\} = F$.

Nécessairement, tout vecteur de F est combinaison linéaire de e et f .

Exercice 3

1. $F = \{a(-1, 1, 0, 0, -6) + b(0, 0, 1, -1, 0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0, -6), (0, 0, 1, -1, 0)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

2. Cherchons des vecteurs de $\mathbb{R}^5$ orthogonaux à tous les vecteurs de F . Pour cela, il suffit de trouver $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tel que

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (-1, 1, 0, 0, -6) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 0, 1, -1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 6x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + 6x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

d'où

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_1 + 6x_5, x_4, x_4, x_5) = x_1(1, 1, 0, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1, 0) + x_5(0, 6, 0, 0, 1).$$

Ainsi, tous les vecteurs de F sont orthogonaux aux trois vecteurs $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 6, 0, 0, 1)$.

En fait, on peut montrer que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (1, 1, 0, 0, 0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 0, 1, 1, 0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 6, 0, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

• Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ et si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. Dans ces deux cas, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , il est clair que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

• Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E . Montrons qu'on a nécessairement $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Si $F \subset G$, le résultat est vrai.

Supposons que F n'est pas inclus dans G et montrons qu'alors G est nécessairement inclus dans F .

Soit $x \in G$. Il s'agit de montrer que $x \in F$.

Puisque F n'est pas inclus dans G , il existe un élément $y \in F$ tel que $y \notin G$.

On a alors $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$.

Notons $z = x + y$. Puisque $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E par hypothèse, on en déduit que $z \in F \cup G$, i.e. $z \in F$ ou $z \in G$.

Si $z \in G$, alors $y = z - x \in G$ puisque $(z, x) \in G^2$ et G est un sous-espace vectoriel de E . Mais $y \notin G$ donc il est impossible que z appartienne à G .

Nécessairement, $z \in F$ donc $x = z - y \in F$ puisque $(z, y) \in F^2$ et F est un sous-espace vectoriel de E .

On a donc bien montré que $x \in F$, ce qui prouve l'inclusion $G \subset F$.

Finalement, on a bien montré l'équivalence $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5

1. Les deux vecteurs sont colinéaires puisque $(27, -9, 21) = 3(9, -3, 7)$ donc la famille n'est pas libre.

Puisqu'elle contient strictement moins que trois éléments, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ non plus.

2. La famille n'est pas libre puisque les deux premiers vecteurs sont colinéaires.

Ainsi, $\text{Vect}\{(9, -3, 7), (27, -9, 21), (5, -5, 1)\} = \text{Vect}\{(9, -3, 7), (5, -5, 1)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$.

3. La famille n'est pas libre puisqu'elle contient le vecteur nul.

Ainsi $\text{Vect}\{(1, 2, 2), (5, 6, 6), (0, 0, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 2, 2), (5, 6, 6)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$.

4. La famille est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. En revanche, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ car elle ne contient que deux éléments.

5. Montrons que la famille est libre. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + \gamma, -\alpha + \beta + \gamma, -\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} \alpha + \gamma &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est également génératrice de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

6. La famille contient quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, elle ne peut donc pas être libre.

Montrons que la famille $((1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1))$ est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, 0, -2) + \beta(2, 3, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\beta, -2\alpha + \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ 3\beta &= 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{cases} \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ 3\gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

donc la famille $((1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1))$ est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est également génératrice de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et on a $\text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3$.

Or,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1)\} \subset \text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

donc $\text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que la famille

$$((1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1))$$

est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ (mais n'est pas libre, ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 6

1. On a $F = \{s(4, -5, -1, -2) | s \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(4, -5, -1, -2)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De même,

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = -y + 5z - 2t\} \\ &= \{(-y + 5z - 2t, y, z, t) | (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(-1, 1, 0, 0) + z(5, 0, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1) | (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0); (5, 0, 1, 0); (-2, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. On a $4 + (-5) - 5(-1) + 2(-2) = 0$ donc $(4, -5, -1, -2) \in G$.

Ainsi, $F = \text{Vect}\{(4, -5, -1, -2)\} \subset G$.

3. Montrons que la famille $((-1, 1, 0, 0); (5, 0, 1, 0); (-2, 0, 0, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(5, 0, 1, 0) + \gamma(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (-\alpha + 5\beta - 2\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C'est donc une famille libre qui engendre G donc $\dim(G) = 3$.

On sait que le vecteur $(4, -5, -1, -2)$ constitue une base de F et appartient à G .

Montrons que la famille $((4, -5, -1, -2), (-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 0, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(4, -5, -1, -2) + \beta(-1, 1, 0, 0) + \gamma(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (4\alpha - \beta - 2\gamma, -5\alpha + \beta, -\alpha, -2\alpha + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C'est une famille libre contenant des vecteurs de G . Puisque $\dim(G) = 3$, on en déduit que c'est une base de G .

Exercice 7

1. $E = \{(x, y, x+y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ donc E est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De même,

$$F = \{(x, x+z, z) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

donc F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, on a

$$(x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

donc $(x, y, z) = z(0, 1, 1)$. Ainsi, $E \cap F = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $(0, 1, 1)$.

2. $E = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 2) | (x, y) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ de base $((1, 0, 0), (0, 1, 2))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De même, $F = \{(0, 2iz, z) | z \in \mathbb{C}\} = \{z(0, 2i, 1) | z \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}\{(0, 2i, 1)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ de base $(0, 2i, 1)$.

On a

$$(x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \\ y = 2iz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \\ y = 4iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $E \cap F = \{0\}$.

3. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t, u, v) \in E &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ 2x + y + z - 2u - v = 0 \\ x + y + z - t - 2v = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ -3y - z + 2t + 4u - v = 0 \\ -y + 3u - 2v = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2} \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ -3y - z + 2t + 4u - v = 0 \\ z - 2t + 5u - 5v = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t + 2u - v \\ y = 3u - 2v \\ z = 2t - 5u + 5v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t, u, v) = (-t + 2u - v, 3u - 2v, 2t - 5u + 5v, t, u, v) \end{aligned}$$

donc $(x, y, z, t, u, v) = t(-1, 0, 2, 1, 0, 0) + u(2, 3, -5, 0, 1, 0) + v(-1, -2, 5, 0, 0, 1)$ donc $E = \text{Vect}\{(-1, 0, 2, 1, 0, 0), (2, 3, -5, 0, 1, 0), (-1, -2, 5, 0, 0, 1)\}$. Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} &\alpha(-1, 0, 2, 1, 0, 0) + \beta(2, 3, -5, 0, 1, 0) + \gamma(-1, -2, 5, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow &(-\alpha + 2\beta - \gamma, 3\beta - 2\gamma, 2\alpha - 5\beta + 5\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow &\alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre et forme une base de E .

De même, on a

$$\begin{aligned} F &= \{a(1, 1, 1, 1, -1, 0) + b(0, 1, 0, 1, 2, 1) + c(1, -1, 1, 0, 1, 0)\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 1, 2, 1), (1, -1, 1, 0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} & \alpha(1, 1, 1, 1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1, 2, 1) + \gamma(1, -1, 1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow & (\alpha + \gamma, \alpha + \beta - \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta, -\alpha + 2\beta + \gamma, \beta) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow & \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre et forme une base de F .

Déterminons $E \cap F$. On a

$$\begin{aligned} & (x, y, z, t, u, v) \in E \cap F \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ 3a + b + c = -3a + 6b + 4c \\ 3a + b + c = -3a + 5b + c \\ 3a + b + c = a + 3b \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ 6a - 5b - 3c = 0 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ -\frac{9}{2}a = 0 \\ b = \frac{3}{2}a \\ c = a \end{cases} \end{aligned}$$

donc $a = b = c = 0$ d'où $E \cap F = \{0\}$.

Exercice 8

1. Puisque ce sont des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ contenant chacune trois vecteurs, il suffit de montrer qu'elles sont libres pour justifier que ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + \beta, -\alpha - \beta + \gamma, -2\alpha - 3\beta - 2\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre et est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(1, 3, 9) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 6\gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (1, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ -\alpha - \beta + \gamma &= 2 \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \gamma &= 3 \\ -\beta - 2\gamma &= 5 \end{cases}$$

d'où $\gamma = 3$, puis $\beta = -11$ et enfin $\alpha = 12$.

Ainsi, $(1, 2, 3) = 12(1, -1, -2) - 11(1, -1, -3) + 3(0, 1, -2)$ donc les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(12, -11, 3)$.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta &= x \\ -\alpha - \beta + \gamma &= y \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma &= z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta &= x \\ \gamma &= x + y \\ -\beta - 2\gamma &= 2x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 5x + 2y + z \\ \beta &= -4x - 2y - z \\ \gamma &= x + y \end{cases}$$

donc les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$(5x + 2y + z, -4x - 2y - z, x + y).$$

3. On a $u = (1, -1, -2) + 2(1, -1, -3) + 3(0, 1, -2) = (3, 0, -14)$ et on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3, 0, -14) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(1, 3, 9) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma &= -14 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \beta + 2\gamma &= -3 \\ 3\beta + 8\gamma &= -17 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \beta + 2\gamma &= -3 \\ 2\gamma &= -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= 5 \\ \gamma &= -4 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

1. Les vecteurs c et d n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre.

On remarque que $a = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ donc $a \in \text{Vect}\{c, d\}$. De même, $b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$ donc $b \in \text{Vect}\{c, d\}$.

Finalement, $\text{Vect}\{a, b, c, d\} = \text{Vect}\{c, d\}$ donc (c, d) est une base de $\text{Vect}\{a, b, c, d\}$.

2. On a $v = -\frac{2}{3}u$ donc $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\}$, ce qui signifie que le vecteur u constitue une base de $\text{Vect}\{u, v\}$.

Exercice 10

1. On a

$$(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) + (e_p - e_1) = 0_E$$

donc la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{p-1} - e_p, e_p - e_1)$ est liée.

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + e_2) + \cdots + \lambda_p (e_1 + \cdots + e_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p) e_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_p) e_2 + \cdots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p) e_{p-1} + \lambda_p e_p = 0.$$

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{p-1} + \lambda_p = 0 \\ \lambda_p = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_p = 0$ puis $\lambda_{p-1} = 0$, puis par récurrence descendante, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + \cdots + e_p)$ est libre.

Exercice 11

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + e_2) + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 (e_1 - e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3) e_1 + (\lambda_1 - \lambda_3) e_2 + \lambda_2 e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_4 + \lambda_3 f_5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + e_2) + \lambda_2 (e_3 - e_1) + \lambda_3 (e_3 + 2e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3) e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_4, f_5) est libre.

3. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre est constituée de 4 vecteurs de E . Or, $\dim(E) = 3$ donc la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est nécessairement liée.

En effet, on a $f_4 = -\frac{1}{2}f_1 + f_2 - \frac{1}{2}f_3$.

Exercice 12

Il s'agit de calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -(a - 1)(a + 2) \end{pmatrix}.$$

- Si $a \notin \{1, -2\}$, la matrice est de rang 3 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 3$.
- Si $a = 1$, la matrice est de rang 1 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 1$.
- Si $a = -2$, la matrice est de rang 2 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 2$.

Exercice 13

1. Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et $e_3 = 2e_2 - e_1$ donc $F = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$. Ainsi, $\dim(F) = 2$.
2. Posons $e'_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e'_4 = (0, 1, 0, 0)$. Montrons que (e_1, e_2, e'_3, e'_4) forme une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4 = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = -5\lambda_1 \\ 17\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$.

Ainsi, la famille (e_1, e_2, e'_3, e'_4) à 4 est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14

On a $\dim(F) = \dim(G) = 2$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par 2 vecteurs non colinéaires.

Ainsi $F = G \Leftrightarrow F \subset G \Leftrightarrow G \subset F$.

- Vérifions si $(0, 2, -1) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(0, 2, -1) = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, -3, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - 3\beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 6\alpha = 2 \\ -3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

donc $(0, 2, -1) = \frac{1}{3}(1, 3, -1) - \frac{1}{3}(1, -3, 2)$, ce qui prouve que $(0, 2, -1) \in F$.

- Vérifions si $(1, 9, -4) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(1, 9, -4) = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, -3, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 3\beta = 9 \\ -\alpha + 2\beta = -4 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -6\beta = 6 \\ 3\beta = -3 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ donc $(1, 9, -4) = 2(1, 3, -1) - (1, -3, 2)$.

On a donc $\{(0, 2, -1), (1, 9, -4)\} \subset F$ donc $G = \text{Vect}\{(0, 2, -1), (1, 9, -4)\} \subset F$ et puisque $\dim(F) = \dim(G)$, on a bien $F = G$.

Exercice 15

1. Vérifions si la famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -2, 3, 1) + \beta(4, 5, 6, 7) + \gamma(1, 0, 2, 3) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -2\alpha + 5\beta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ 3\alpha + 6\beta + 2\gamma = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \alpha + 7\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 13\beta + 2\gamma = 0 \\ -6\beta - \gamma = 0 \\ 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 13L_3 + 6L_2, L_4 \leftarrow 13L_4 - 3L_2} \begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 13\beta + 2\gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ 20\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc la famille est libre. Le rang de la famille est donc égal à 3.

2. Déterminons le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1, L_5 \leftarrow L_5 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2, L_5 \leftarrow L_5 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

donc la famille est de rang 2.

Exercice 16

1. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4) = 4$.
2. Déterminons le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ i & 0 & -1 & -2-i \\ 1+i & 2-i & 0 & 3i \\ -i & 1+i & 1 & -5-i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1, L_3 \leftarrow L_3 - (1+i)L_1, L_4 \leftarrow L_4 + iL_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2+i & 1 & -8-i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2, L_4 \leftarrow L_4 + (2+i)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & 4-i \\ 0 & 0 & -1-i & -5-2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & 4-i \\ 0 & 0 & -1-i & -5-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - (1+i)L_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & 4-i \\ 0 & 0 & 0 & -10-5i \end{pmatrix}$$

donc la matrice est de rang 4, i.e. le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension 4. On en déduit que cette famille est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^4) = 8$.

Puisque la famille est libre dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, elle reste libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ donc elle engendre un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de dimension 4 dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, qui est de dimension 8. Ainsi, cette famille n'est pas une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Exercice 17

1. On sait que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$. Puisque la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ contient $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$.

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

En évaluant le polynôme $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$ en x_j , il vient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_j) = 0.$$

Or, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ donc la somme devient $\lambda_j L_j(x_j) = 0$, i.e. $\lambda_j = 0$.

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ donc la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre, ce qui prouve que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Puisque la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe des scalaires (uniques) $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$.

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En évaluant le polynôme P en x_j , il vient

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_i = P(x_i)$ donc $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

Exercice 18

1. • On a $0_n^T = 0_n$ donc $0_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$$

donc $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On a $0_n^T = -0_n$ donc $0_n \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = -\lambda A - \mu B = -(\lambda A + \mu B)$$

donc $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^n A_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} E_{i,j} + A_{j,i} E_{j,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow A^T = A \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{i,j} = A_{j,i} \\ &\Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^n A_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) \\ &\Leftrightarrow A \in \text{Vect}((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

De plus, puisque les matrices élémentaires forment une famille libre, on montre aisément que la famille $((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$ est libre : c'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

constituée de $n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

De même, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow A^T = -A \\
&\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{i,j} = -A_{j,i} \\
&\Leftrightarrow A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i}) \\
&\Leftrightarrow A \in \text{Vect}((E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}).
\end{aligned}$$

On en déduit cette fois que $((E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a alors $A^T = A = -A$ donc $A = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$. Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.

De plus, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : ceci permet de montrer d'une autre manière que celle vue précédemment que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, et ce de manière unique.

Exercice 19

- Soit $P = 0_E$. On a $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ donc $P = 0_E \in F$.
Soient $(P, Q) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
On a $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et on montre de même que $(\lambda P + \mu Q)(1) = (\lambda P + \mu Q)(2) = 0$ donc $\lambda P + \mu Q \in F$. Ceci prouve que F est un sous-espace vectoriel de E .
• Une preuve analogue montre que G est un sous-espace vectoriel de E .
• Soit $P = 0_E$. On a $P(-X) = 0_E = P(X)$ donc $P = 0_E \in H$.
Soient $(P, Q) \in H^2$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
On a $(\lambda P + \mu Q)(-X) = \lambda P(-X) + \mu Q(-X) = \lambda P(X) + \mu Q(X)$ donc $\lambda P + \mu Q \in H$. Ceci prouve que H est un sous-espace vectoriel de E .
- Soit $P \in F \cap G$. On a $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$ donc P a quatre racines distinctes. Or, $P \in \mathbb{K}_3[X]$ donc $\deg(P) \leq 3$. Puisque P a strictement plus de racines que son degré, on en déduit que $P = 0$, ce qui prouve que $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi, F et G sont en somme directe.
Notons $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
• Soit $P \in F \oplus G$. Il existe $P_F \in F$ et $P_G \in G$ tels que $P = P_F + P_G$. Par définition de F et G , on a $P_F(1) = P_F(2) = P_G(1) = P_G(2) = 0$ donc $P(1) = P(2) = 0$, i.e $P \in K$, ce qui prouve que $F \oplus G \subset K$.
• On a $F = \{aX(X-1)(X-2), a \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(X(X-1)(X-2))$ donc $\dim(F) = 1$. On montre de même que $\dim(G) = 1$ donc $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 2$.
Par ailleurs, $K = \{(aX+b)(X-1)(X-2), (a,b) \in \mathbb{K}^2\} = \{aX(X-1)(X-2) + b(X-1)(X-2), (a,b) \in \mathbb{K}^2\} = \text{Vect}(X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2))$.
Puisque les polynômes $X(X-1)(X-2)$ et $(X-1)(X-2)$ sont de degrés distincts, ils forment une famille libre et génératrice de K donc $\dim(K) = 2$.
• Puisque $F \oplus G \subset K$ et que $\dim(F \oplus G) = \dim(K)$, on en conclut que $F \oplus G = K$.

3. • Soit $P \in H \cap K$. Puisque $P \in K$, on a $P(1) = P(2) = 0$ et puisque $P \in H$, on a $P(-1) = P(1) = 0$ et $P(-2) = P(2) = 0$. Finalement, P a quatre racines distinctes $(-2, -1, 1, 2)$ alors que $\deg(P) \leq 3$ donc $P = 0$. On en déduit que $H \cap K = \{0_E\}$, i.e. H et K sont en somme directe.
- Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 P \in H &\Leftrightarrow P(-X) = P(X) \\
 &\Leftrightarrow -a_3X^3 + a_2X^2 - a_1X + a_0 = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \\
 &\Leftrightarrow a_3 = a_1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow P = a_2X^2 + a_0 \\
 &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(1, X^2)
 \end{aligned}$$

donc $H = \text{Vect}(1, X^2)$ et on en déduit que $\dim(H) = 2$.

- Finalement, $\dim(K \oplus H) = \dim(K) + \dim(H) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$ donc

$$E = K \oplus H = (F \oplus G) \oplus H.$$