

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

18.1 Applications linéaires

18.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1: Applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels .

Soit $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est linéaire si pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Dans le cas où $E = F$, on dit qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme et on note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace des endomorphismes de E .

Une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire.

Remarque 1. • Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, nécessairement $f(0_E) = 0_F$.

En effet, $f(0_E) = f(0 \times 0_E) = 0 \times f(0_E) = 0_F$.

• Pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En effet,

$$f(x + y) = f(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot f(y) = f(x) + f(y).$$

• Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

En effet,

$$f(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot x + 1 \times 0_E) = \lambda \cdot f(x) + 1 \cdot f(0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x).$$

• Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

• Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ n'est jamais vide. En effet, l'application

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$$

est toujours définie et est linéaire. Cette application est appelée l'application nulle, notée $0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

• Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'application $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$
 $x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E appelé l'application identité de E .

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application λId_E est une application linéaire appelée homothétie de rapport λ .

Exemple 1. • $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.

En effet, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$ en notant $a = f(1)$. On a donc bien l'inclusion $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \subset \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $f(x) = ax$. (Ceci implique notamment que $f(1) = a$.)

Montrons que f est une application linéaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors $f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda ax + \mu ay = \lambda f(x) + \mu f(y)$, ce qui prouve la linéarité de f et l'inclusion $\{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, d'où l'égalité $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.

Par exemple, l'application $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas linéaire car

$$f(1+2) = f(3) = 9 \neq f(1) + f(2) = 1 + 4 = 5.$$

De même, l'application $g : (x, y) \longmapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire car

$$g(2(1, 1)) = g(2, 2) = 4 \neq 2g(1, 1) = 2.$$

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (y, x - 2y, 3x + 2y)$.

L'application f est linéaire. En effet, soient $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y', 3\lambda x + 3\mu x' + 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(y, x - 2y, 3x + 2y) + \mu(y', x' - 2y', 3x' + 2y') \\ &= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y'). \end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

• L'application $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $f \longmapsto f'$ est linéaire car pour tout $(f, g) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$,
pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

donc la dérivation est une application linéaire.

Il en va de même de l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \longmapsto P'$.

• Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \leq b$.

L'application $\varphi : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$ est linéaire car pour tout $(f, g) \in (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}))^2$,
pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

donc calculer l'intégrale sur un segment d'une fonction continue est une application linéaire.

• L'application $f : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 $A \longmapsto A^T$ est linéaire car pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$,
pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f(\lambda A + \mu B) = (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda f(A) + \mu f(B).$$

• L'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto \bar{z}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire car pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda z + \mu z') = \overline{\lambda z + \mu z'} = \bar{\lambda} \times \bar{z} + \bar{\mu} \times \bar{z}' = \lambda \times \bar{z} + \mu \times \bar{z}' = \lambda f(z) + \mu f(z')$$

car $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

• L'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire car pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda z + \mu z') = \operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z')$$

car $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Idem pour l'application $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$.

18.1.2 Opérations sur les applications linéaires

Définition 2: Opérations sur les applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}(E, F)$ par

$$\forall x \in E, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

2. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

On définit $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ par

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Proposition 1: Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Ceci assure que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration. • Tout d'abord, $\mathcal{L}(E, F)$ est non vide puisqu'il contient l'application nulle

$$0_{\mathcal{L}(E, F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}.$$

• Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de f et g , on a

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) \\ &= \lambda \alpha f(x) + \lambda \beta f(y) + \mu \alpha g(x) + \mu \beta g(y) \\ &= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + \beta(\lambda f(y) + \mu g(y)) \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application $\lambda f + \mu g$ est linéaire. ■

Remarque 2. Avec ces définitions, tous les axiomes suivants sont facilement vérifiés : pour tout $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E, F)^3$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f + g = g + f; \quad f + (g + h) = (f + g) + h; \quad f + (-f) = 0_{\mathcal{L}(E, F)}; \quad 1 \cdot f = f;$$

$$\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g; \quad (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f; \quad \lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f.$$

On peut également remarquer que la preuve précédente permet de montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Proposition 2: Composition d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. Par définition, $g \circ f : E \rightarrow G$. Montrons que $g \circ f$ est linéaire.

Soient $(x, y) \in E^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) \\ &= g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) \quad \text{par linéarité de } g \\ &= \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application $g \circ f$ est linéaire. ■

Remarque 3. Soit f un endomorphisme de E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 3: Isomorphisme

Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si f est une application bijective, on dit que f est un isomorphisme.

Si $F = E$, on dit que f est un automorphisme.

Remarque 4. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

Proposition 3: Bijection réciproque d'un isomorphisme

Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme de E vers F .

Soit $f^{-1} : F \rightarrow E$ la bijection réciproque de f .

Alors f^{-1} est une application linéaire, i.e. $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. Montrons que f^{-1} est linéaire.

Soient $(x, y) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Puisque f est bijective, il existe un unique couple $(a, b) \in E^2$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$, i.e. $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. On a alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + \mu y) &= f^{-1}(\lambda f(a) + \mu f(b)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda a + \mu b)) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda a + \mu b \quad \text{car } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \\ &= \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de f^{-1} . ■

Remarque 5. La bijection réciproque d'un isomorphisme est donc elle-même un isomorphisme. Si $F = E$, la bijection réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

Exemple 2. • Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $f(x) = ax$.

Alors f est un automorphisme si et seulement si $a \neq 0$ et dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{a}$.

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

L'application linéaire f est un automorphisme si et seulement si pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (u, v)$ si et seulement si le système

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

admet une unique solution, ce qui équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et dans

ce cas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (2x - y, -x + y)$, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc f est un automorphisme et on a les équivalences :

$$(x, y) = f^{-1}(u, v) \Leftrightarrow f(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donc f^{-1} est l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f^{-1}(u, v) = (u + v, u + 2v)$.

On peut effectivement vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^{-1}(f(x, y)) = f^{-1}(2x - y, -x + y) = (2x - y - x + y, 2x - y - 2x + 2y) = (x, y)$$

et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(f^{-1}(u, v)) = f(u + v, u + 2v) = (2u + 2v - u - 2v, -u - v + u + 2v) = (u, v).$$

• L'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme de bijection réciproque

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x + iy \end{aligned}$$

$f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x + iy &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

18.1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 4: Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit E' un sous-espace vectoriel de E . Alors $f(E') = \{f(x), x \in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. Soit F' un sous-espace vectoriel de F . Alors $f^{-1}(F') = \{x \in E, f(x) \in F'\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 6. Dans le cas où f est bijective, $f^{-1}(F')$ est l'image directe de F' par l'application f^{-1} .

Démonstration.

- $0_E \in E'$ car E' est un sous-espace vectoriel de E donc $f(0_E) = 0_F \in f(E')$.
 • Soient $(x, y) \in (f(E'))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(E')$.
 Puisque $(x, y) \in (f(E'))^2$, il existe $(a, b) \in (E')^2$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$ donc par linéarité de f :

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b).$$

Puisque $(a, b) \in (E')^2$ et que E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $\lambda a + \mu b \in E'$, d'où $f(\lambda a + \mu b) \in f(E')$. Ainsi, $\lambda x + \mu y \in f(E')$ donc $f(E')$ est stable par combinaisons linéaires, et finalement $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .

- On a $f(0_E) = 0_F \in F'$ puisque F' est un sous-espace vectoriel de F , donc $0_E \in f^{-1}(F')$.
 • Soient $(x, y) \in (f^{-1}(F'))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(F')$.
 Par linéarité de f , on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Or, par définition de $f^{-1}(F')$, on sait que $(f(x), f(y)) \in (F')^2$ et puisque F' est un sous-espace vectoriel de F , on en déduit que $\lambda f(x) + \mu f(y) \in F'$ d'où $f(\lambda x + \mu y) \in F'$, ce qui signifie que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(F')$.
 Ceci prouve que $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 4: Noyau et image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ le noyau de f et $\text{Im}(f) = f(E)$ son image.

Remarque 7. L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Ceci découle de la proposition précédente puisque $\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\text{Im}(f) = f(E)$.

Proposition 6: Caractérisation des applications linéaires injectives

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. • Supposons que f est injective. Tout d'abord, on a toujours $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$, d'où l'inclusion $\{0_E\} \subset \ker(f)$.

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_F = f(0_E)$ donc par injectivité de f , il en résulte que $x = 0_E$ d'où l'inclusion $\ker(f) \subset \{0_E\}$ et finalement l'égalité $\ker(f) = \{0_E\}$.

• Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective.

Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.

Par linéarité de f , on a alors $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$ donc $x - y \in \ker(f) = \{0_E\}$ d'où $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$, ce qui prouve l'injectivité de f .

Exemple 3. • Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (x - y, x - 2y, x + y)$.

On a

$$(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x - y, x - 2y, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, ce qui prouve que l'application linéaire f est injective.

De même, $\text{Im}(f) = \{(x - y, x - 2y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 1) + y(-1, -2, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, -2, 1)\}$.

Les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(-1, -2, 1)$ sont libres donc forment une base de $\text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, -2, 1)\} = \text{Im}(f)$. Ainsi, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que l'application linéaire f n'est pas surjective.

On remarque que $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^3)$, égalité que nous généraliserons plus tard grâce au théorème du rang.

$$\bullet \text{ Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - z, x - 2y + z). \end{array}$$

On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (y - z, x - 2y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x - z = 0 \end{cases}$$

donc $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$.

Ainsi $\ker(f) = \text{Vect}(1, 1, 1) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc l'application linéaire f n'est pas injective.

De même, $\text{Im}(f) = \{(y - z, x - 2y + z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(0, 1) + y(1, -2) + z(-1, 1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}\{(0, 1), (1, -2), (-1, 1)\}$.

Les vecteurs $(0, 1)$ et $(-1, 1)$ sont deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. Donc $\text{Vect}\{(0, 1), (-1, 1)\} = \mathbb{R}^2$.

Or, $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\{(0, 1), (-1, 1)\} \subset \text{Vect}\{(0, 1), (1, -2), (-1, 1)\} = \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui prouve que l'application linéaire f est surjective.

On remarque que $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, égalité que nous généraliserons plus tard grâce au théorème du rang.

18.1.4 Endomorphismes

On rappelle qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et que l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

De même que pour $\mathcal{L}(E, F)$, on montre que $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et qu'une composition d'endomorphismes est encore un endomorphisme.

Définition 5: Puissances d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $u^k \in \mathcal{L}(E)$ par

$$u^k = \begin{cases} \text{Id}_E & \text{si } k = 0 \\ \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}} & \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

On rappelle qu'on appelle automorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tout endomorphisme de E bijectif.

Définition 6: Groupe linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E , et on l'appelle le groupe linéaire de E .

Remarque 8. $\text{GL}(E)$ est non vide puisqu'il contient toujours $\text{Id}(E)$.

C'est un groupe (pour la composition des endomorphismes) car il vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 7: Propriétés de $GL(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit $f \in GL(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda f \in GL(E)$.
2. Soient $(f, g) \in (GL(E))^2$. Alors $g \circ f \in GL(E)$.
3. Soit $f \in GL(E)$. Alors $f^{-1} \in GL(E)$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On sait déjà que λf est linéaire. Montrons que λf est bijective.

Soit $y \in E$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ d'où, par linéarité de f , $\lambda f(\frac{1}{\lambda}x) = \frac{1}{\lambda} \times \lambda f(x) = f(x) = y$. Ainsi, $\frac{1}{\lambda}x$ est un antécédent de y par λf , ce qui prouve que λf est surjective.

De plus, puisque $\lambda \neq 0$, on a pour tout $x \in E$,

$$\lambda f(x) = 0_E \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker(f) = \{0_E\}$$

puisque f est injective. Ainsi, $\ker(\lambda f) = \{0_E\}$, ce qui prouve que λf est injective.

On en conclut que λf est bijective, donc $\lambda f \in GL(E)$.

2. On sait déjà que $g \circ f$ est linéaire. De plus, puisque g et f sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective donc $g \circ f \in GL(E)$.
3. On sait déjà que f^{-1} est linéaire et puisque f est bijective, f^{-1} l'est aussi, donc $f^{-1} \in GL(E)$.

■

Remarque 9. • Si $(f, g) \in GL(E)^2$, on a toujours $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

- On en déduit que si $f \in GL(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f^k \in GL(E)$.
- En revanche, $GL(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$: en effet, $0_{\mathcal{L}(E)} \notin GL(E)$ et $GL(E)$ n'est pas non plus stable par E puisque $\underbrace{\text{Id}_E}_{\in GL(E)} + \underbrace{(-\text{Id}(E))}_{\in GL(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \notin GL(E)$.

18.1.5 Détermination d'une application linéaire**Proposition 8**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et admet une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F donc on a clairement

$$\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \subset \text{Im}(f).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E$, $f(x) = y$.

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

Ainsi, $y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k)$ par linéarité de f donc $y \in \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ d'où l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Finalement, on a bien l'égalité $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$. ■

Exemple 4. • Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x - 2y, x + y). \end{matrix}$

Considérons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

On a $f(e_1) = (1, 1, 1)$, $f(e_2) = (-1, -2, 1)$ et on a vu dans l'exemple précédent que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, -2, 1)\} = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2)\}$.

• Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - z, x - 2y + z). \end{matrix}$

Considérons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

On a $f(e_1) = (0, 1)$, $f(e_2) = (1, -2)$, $f(e_3) = (-1, 1)$ et on a vu dans l'exemple précédent que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(0, 1), (1, -2), (-1, 1)\} = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

En revanche, $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ne constitue pas une base de $\text{Im}(f)$ car ces trois vecteurs ne sont pas libres.

Théorème 1: Caractérisation d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie et admet une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soient $(f_1, \dots, f_n) \in F^n$.

Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = f_k.$$

Remarque 10. Autrement dit, une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Démonstration. • Montrons tout d'abord qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = f_k$.

Soit $x \in E$. Alors il existe des scalaires uniques $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

On définit $f(x)$ par $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Il n'y a ainsi pas d'ambiguïté sur la définition de la fonction f car les coordonnées $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont uniques.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $e_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_k = 1$ et pour tout $i \neq k$, $\lambda_i = 0$ donc d'après la définition de f , on a bien $f(e_k) = f_k$.

Montrons que l'application f ainsi déterminée est bien linéaire.

Soient $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. On a alors $f(y) = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i e_i\right) \\
 &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) e_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) f_i \quad \text{par définition de } f \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i f_i \\
 &= \lambda f(x) + \mu f(y),
 \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de f . On a donc bien construit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = f_k$.

• Montrons l'unicité d'une telle application f . Supposons qu'il existe une autre application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_k) = f_k$.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

Alors

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) \quad \text{par linéarité de } f \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k g(e_k) \quad \text{par hypothèse} \\
 &= g\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) \quad \text{par linéarité de } g \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

et ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $f = g$.

On a donc bien montré l'unicité de l'application f . ■

Exemple 5. Déterminons l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1, 1) = (1, -2, 1)$ et $f(-1, 1) = (2, 0, 3)$.

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont libres donc ils forment bien une base de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{-x+y}{2}(-1, 1)$.

On a alors

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2}f(1, 1) + \frac{-x+y}{2}f(-1, 1) = \frac{x+y}{2}(1, -2, 1) + \frac{-x+y}{2}(2, 0, 3),$$

d'où pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, -x - y, -x + 2y\right)$.

Théorème 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'application f est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F .
2. L'application f est surjective si et seulement si l'image par f de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F .

Démonstration.

1. • Supposons que l'application f est injective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0_F$. Pour montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, il faut montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

Par linéarité de f , on a $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0_F \Leftrightarrow f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = 0$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in \ker(f) = \{0_E\}$ car f est injective.

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

Ceci montre que l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F .

• Supposons que l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F . Montrons que f est injective. Pour cela, montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$. On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(f)$. Montrons que $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(f)$.

Supposons par l'absurde que $x \neq 0_E$, alors (x) est une famille libre de E donc par hypothèse, $(f(x))$ est une famille libre de F et a fortiori, $f(x) \neq 0_F$, ce qui contredit le fait que $x \in \ker(f)$.

Nécessairement, $x = 0_E$, d'où $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Finalement, on a bien l'égalité $\ker(f) = \{0_E\}$, ce qui prouve que f est injective.

2. On a déjà montré que pour toute famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de E , on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = F$$

ce qui prouve que f est surjective si et seulement si l'image par f de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F .

■

Corollaire 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. L'application f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .
2. L'application f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .
3. L'application f est bijective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

Démonstration.

1. • Supposons que f est injective. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , d'après le théorème précédent, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .

• Supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F . Montrons que f est injective, i.e. $\ker(f) = \{0_E\}$. On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(f)$. Montrons que $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(f) \subset E$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe des scalaires (uniques)

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

$$\text{On a } 0_F = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k).$$

Par hypothèse, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0,$$

ce qui implique que $x = 0_E$, d'où $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Finalement, on a bien $\ker(f) = \{0_E\}$ et on en déduit que f est injective.

2. • Supposons que f est surjective. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , d'après le théorème précédent, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

• Supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F , i.e. $\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = F$.

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , on a $\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = \text{Im}(f)$ d'où $\text{Im}(f) = F$, ce qui implique que f est surjective.

3. Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective ; une base est une famille libre et génératrice. Ce résultat découle donc directement des deux alinéas précédents. ■

Remarque 11. Si f est injective, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

Exemple 6. • Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + y) \end{cases}$

On a $f(1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 1) = (-1, 1)$. Les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ donc d'après le corollaire précédent, f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = X^{k-1}$.

Puisque la famille $(X^{k-1})_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'application linéaire f envoie une base de $\mathbb{R}^n$ sur une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Cet exemple illustre le fait suivant :

Corollaire 2: Existence d'isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Dans ce cas, on dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes et on note $E \simeq F$.

Démonstration. • Supposons qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . D'après le corollaire précédent, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F , ce qui implique que $\dim(E) = \dim(F) = n$.

• Réciproquement, supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$.

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = f_k$.

Ainsi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F donc d'après le théorème précédent, f est bijective. ■

Remarque 12. • Il n'y a évidemment pas unicité de l'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire entre deux tels espaces est bijective dès qu'elle envoie une base du premier sur une base du second.

• Il n'y a donc pas d'application linéaire bijective de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ si $n \neq p$.

Proposition 9: Prolongement d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , i.e. $E = E_1 \oplus E_2$.

Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\begin{cases} u|_{E_1} = u_1 \\ u|_{E_2} = u_2 \end{cases}$

Démonstration.

• **Existence :** Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Posons alors $u(x) = \underbrace{u_1(x_1)}_{\in F} + \underbrace{u_2(x_2)}_{\in F} \in F$ (ce qui peut se faire sans ambiguïté vu l'unicité du couple (x_1, x_2)).

Montrons que l'application $u : E \rightarrow F$ ainsi définie est linéaire.

Soient $(x, y) \in E^2$ avec $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ et $y = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u(\underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2}) \\ &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \quad (\text{définition de } u) \\ &= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2) \quad (\text{linéarité de } u_1 \text{ et } u_2) \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + \mu(u_1(y_1) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

donc u est bien linéaire.

Enfin, pour tout $x \in E_1$, on a $x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2}$ donc $u(x) = u_1(x) + u_2(0_E) = u_1(x)$,

d'où $u|_{E_1} = u_1$ et on montre de même que $u|_{E_2} = u_2$, ce qui achève de prouver l'existence de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant les propriétés voulues.

• **Unicité :**

Supposons qu'il existe deux applications $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ telles que $\begin{cases} u|_{E_1} = u_1 = v|_{E_1} \\ u|_{E_2} = u_2 = v|_{E_2} \end{cases}$.

Soit $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} \in E$. On a alors

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) = v(x_1) + v(x_2) = v(x_1 + x_2) = v(x)$$

et ce pour tout $x \in E$. On en déduit que $u = v$, ce qui prouve l'unicité d'une telle application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

18.1.6 Projections et symétries

Définition 7: Projection

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E , i.e. $F \oplus G = E$.

On appelle projection (ou projecteur) sur F parallèlement à G l'application linéaire :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ p : x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} &\longmapsto x_F . \end{aligned}$$

Plus généralement, on appelle projection (ou projecteur) tout endomorphisme de E qui respecte la définition précédente pour un couple (F, G) de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Remarque 13. Le fait que p est linéaire est une conséquence du résultat précédent qu'il suffit d'appliquer pour $E_1 = F, E_2 = G, u_1 = \text{Id}_F$ et $u_2 = 0_{\mathcal{L}(G, E)}$.

Exemple 7. • Si E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, avec $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$, alors la projection sur

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ F \text{ parallèlement à } G &\text{ est l'application } \text{Re} : \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}} \longmapsto x . \end{aligned}$$

• Soit $E = \mathbb{K}^3, F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $G = \text{Vect}(0, 0, 1)$. La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, 0) . \end{aligned}$$

Proposition 10: Noyau et image d'une projection

On garde les notations de la définition précédente.

Alors $G = \ker(p)$ et $F = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E)$.

En particulier, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ et on a

$$E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p).$$

Démonstration. • Soit $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} \in F \oplus G = E$. On a

$$x \in \ker(p) \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow x_F = 0_E \Leftrightarrow x = x_G \in G$$

donc $\ker(p) = G$.

• Par définition de p , on a clairement $\text{Im}(p) \subset F$. Par ailleurs, si $x \in F$, on a $p(x) = x$ donc $x \in \text{Im}(p)$, ce qui prouve l'inclusion $F \subset \text{Im}(p)$ et finalement l'égalité $F = \text{Im}(p)$.

Enfin, si $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$, on a les équivalences suivantes :

$$x \in \ker(p - \text{Id}_E) \Leftrightarrow p(x) - x = 0_E \Leftrightarrow x_F - x_F - x_G = 0_E \Leftrightarrow x_G = 0_E \Leftrightarrow x \in F$$

d'où $F = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E)$. ■

Remarque 14. • Il est important de noter que si $x \in \text{Im}(p)$, alors $p(x) = x$.

• Un projecteur p est un automorphisme si et seulement si

$$\begin{cases} \text{Im}(p) &= E \\ \ker(p) &= \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F &= E \\ G &= \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow p = \text{Id}_E.$$

Ainsi, aucun projecteur p (hormis le projecteur trivial Id_E) n'est bijectif.

Proposition 11: Caractérisation des projections

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Alors p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration. • Supposons que p soit la projection sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \ker(p)$.

Soit $x \in E$ avec $x = x_F + x_G$, où $(x_F, x_G) \in F \times G$. On a

$$p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x)$$

donc $p \circ p = p$.

• Réciproquement, supposons que $p \circ p = p$ et montrons que p est la projection sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \ker(p)$.

Commençons par montrer que $\text{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$.

Soit $x \in \ker(p) \cap \text{Im}(p)$.

Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où $0_E = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$, ce qui prouve que $\ker(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$. Ainsi, $\text{Im}(p) + \ker(p) = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Montrons ensuite que $\text{Im}(p) + \ker(p) = E$. L'inclusion $\text{Im}(p) + \ker(p) \subset E$ est évidente.

Réciproquement, soit $x \in E$. Par hypothèse, on a $p \circ p(x) = p(x)$ donc $p(x) - p \circ p(x) = 0_E$ d'où, par linéarité de p , $p(x - p(x)) = 0_E$.

Ainsi, $x - p(x) \in \ker(p)$ donc $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} \in \ker(p) + \text{Im}(p)$, ce qui prouve que

$E = \ker(p) + \text{Im}(p)$.

Finalement, on a bien $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Notons alors $F = \text{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$ et considérons $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$. Puisque $x_F \in \text{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x_F = p(y)$ et puisque $x_G \in \ker(p)$, alors $p(x_G) = 0_E$. Ainsi, par linéarité de p , on a

$$p(x) = p(x_F) + p(x_G) = p \circ p(y) = p(y) = x_F,$$

ce qui est bien la définition de la projection sur F parallèlement à G . ■

Remarque 15. Ceci permet d'affirmer que pour tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$, on a $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Définition 8: Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E , i.e. $F \oplus G = E$.

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ s : x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} &\longmapsto x_F - x_G . \end{aligned}$$

Plus généralement, on appelle symétrie tout endomorphisme de E qui respecte la définition précédente pour un couple (F, G) de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Remarque 16. Le fait que s est linéaire est une conséquence du prolongement d'applications linéaires qu'il suffit d'appliquer pour $E_1 = F, E_2 = G, u_1 = \text{Id}_F$ et $u_2 = -\text{Id}_G$.

Exemple 8. • Si E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, avec $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$, alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application $\text{Re} : \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}} \longmapsto x - iy$, ce qui est l'application $z \mapsto \bar{z}$.

• Soit $E = \mathbb{K}^3, F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $G = \text{Vect}(0, 0, 1)$. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, -z) . \end{aligned}$$

Proposition 12: Lien entre projections et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E .

Soit p la projection sur F et parallèlement à G , soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G .

Alors $s = 2p - \text{Id}_E$ (ou $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$.)

Démonstration. Soit $x = x_F + x_G \in E$ où $(x_F, x_G) \in F \times G$. Alors

$$(2p - \text{Id}_E)(x) = 2p(x) - x = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G .

Alors $F = \ker(s - \text{Id}_E)$ et $G = \ker(s + \text{Id}_E)$, d'où

$$E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E).$$

Remarque 17. Ainsi, $x \in F \Leftrightarrow s(x) = x$ et $x \in G \Leftrightarrow s(x) = -x$.

Démonstration. Notons p la projection sur F parallèlement à G .

On sait que $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$.

Ainsi, $F = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) = \ker\left(\frac{1}{2}(s - \text{Id}_E)\right) = \ker(s - \text{Id}_E)$ et $G = \ker(p) = \ker(s + \text{Id}_E)$ et on a bien

$$E = F \oplus G = \text{Im}(p) \oplus \ker(p) = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E).$$

■

Proposition 13: Caractérisation des symétries

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $s \in \mathcal{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}_E$.

Démonstration. Soit $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. On a les équivalences suivantes :

$$s \text{ est une symétrie} \Leftrightarrow p \text{ est une projection} \Leftrightarrow p \circ p = p \Leftrightarrow \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}_E.$$

■

Corollaire 4: Inverse d'une symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.
Alors $s \in \text{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$.

Démonstration. Ceci découle de la caractérisation précédente puisqu'on a alors $s \circ s = \text{Id}_E$. ■

18.1.7 Equations linéaires

Proposition 14: Solutions d'une équation linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $a \in F$.
Considérons l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$:

$$(E) : f(x) = a.$$

1. Si $a \notin \text{Im}(f)$, l'ensemble des solutions de E est l'ensemble vide.
2. Si $a \in \text{Im}(f)$, notons x_0 un antécédent de a par f . Alors

$$\mathcal{S}_E = x_0 + \ker(f) = \{x_0 + x, x \in \ker(f)\}.$$

Démonstration.

1. Si $a \notin \text{Im}(f)$, le vecteur a n'admet pas d'antécédent par f donc l'équation $f(x) = a$ ne peut pas avoir de solution dans E .
2. Supposons que $a \in \text{Im}(f)$, et considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = a$.
Soit $x \in E$. On a alors les équivalences suivantes :

$$f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f) \Leftrightarrow x \in x_0 + \ker(f)$$

d'où le résultat.



Exemple 9. • Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si B est dans l'image de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Dans ce cas, si X_0 est une solution de $AX = B$, alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est $X_0 + \ker(f)$, où $\ker(f) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$.

• Soit $(E) : \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'inconnue y où a et b sont des fonctions continues sur I .

Soit (H) l'équation homogène associée à (E) .

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array}$$

Soit y_0 une solution particulière de (E) , i.e. un antécédent de b par f .

Alors $\mathcal{S}_E = y_0 + \ker(f)$ où $\ker(f) = \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), y' + ay = 0\} = \mathcal{S}_H$.

On a un résultat analogue pour les équations différentielles d'ordre 2.

• Soit $a \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - au_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{K}$. Un antécédent de la suite constante égale à b par f est la suite constante égale à $l = \frac{b}{1-a}$.

De plus, $\ker(f) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Ainsi, l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, i.e. les antécédents de b par f , sont

$$l + \ker(f) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n + l, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

et on a alors $\lambda = u_0 - l$.

18.2 Rang d'une application linéaire

18.2.1 Définition

Définition 9: Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application linéaire f , notée $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$ si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, i.e.

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Remarque 18. • Puisque $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F , on a nécessairement

$$\text{rg}(f) \leq \dim(F).$$

• On a vu que pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$.

Exemple 10. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -2x - 2y + 2z).$$

Considérons la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, -2)$; $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2)$ et $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 2)$.

Ainsi, on voit que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(1, -2)$ donc $\text{rg}(f) = 1$.

18.2.2 Théorème du rang et conséquences

Théorème 3: Forme géométrique du théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , i.e. $\ker(f) \oplus S = E$.

Alors l'application

$$f|_S : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \text{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Tout d'abord, puisque f est linéaire, la linéarité de $f|_S$ est évidente.

• Montrons que $f|_S$ est injective. Pour cela, montrons que $\ker(f|_S) = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset \ker(f|_S)$ est évidente. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \ker(f|_S)$. Par définition, on a alors $x \in S$ et $f(x) = 0_E$, i.e. $x \in S \cap \ker(f) = \{0_E\}$ puisque $\ker(f)$ et S sont en somme directe. Ceci prouve que $\ker(f|_S) \subset \{0_E\}$ et finalement $\ker(f|_S) = \{0_E\}$, donc $f|_S$ est injective.

• Montrons que $f|_S$ est surjective. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Or, puisque $E = \ker(f) \oplus S$, il existe $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times S$ tel que $x = x_1 + x_2$ d'où, par linéarité de f ,

$$y = f(x) = f(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{=0_E \text{ car } x_1 \in \ker(f)} + f(x_2) = f(x_2) \in f(S)$$

donc $f|_S$ est surjective.

On en conclut que $f|_S$ est bijective. ■

Corollaire 5: Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{rg}(f)$ est fini et

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f).$$

Démonstration. Puisque E est de dimension finie et que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , on peut considérer S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , i.e. $E = \ker(f) \oplus S$.

D'après la proposition précédente, S et $\text{Im}(f)$ sont isomorphes donc $\dim(S) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$.

On a alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(S) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$. ■

Exemple 11. Reprenons l'exemple précédent de la fonction $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + y - z, -2x - 2y + 2z)$.

On a vu que $\text{rg}(f) = 1$.

Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc

$$\dim(\ker(f)) = 2.$$

Vérifions-le en déterminant une base de $\ker(f)$.

$$\text{On a } (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x + y.$$

On a donc $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$.

Ainsi, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ et puisque la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est libre, c'est bien une base de $\ker(f)$ qui est donc bien de dimension 2.

Corollaire 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

1. f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
2. f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
3. f est bijective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

1. D'après le théorème du rang, on a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f).$$

2. L'équivalence est triviale puisque f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
3. L'équivalence découle des deux alinéas précédents.

■

Corollaire 7: Existence d'applications linéaires injectives ou surjectives entre espaces vectoriels de dimensions finies

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective si et seulement si

$$\dim(E) \leq \dim(F).$$

2. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective si et seulement si

$$\dim(E) \geq \dim(F).$$

Démonstration.

1. • Supposons qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. D'après le corollaire précédent, on a $\dim(E) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Or, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F donc $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$ d'où

$$\dim(E) \leq \dim(F).$$

- Supposons que $\dim(E) \leq \dim(F)$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F avec

$$\dim(E) = n \leq p = \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par $f(e_k) = f_k$ (loisible car $n \leq p$).

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre puisque c'est une sous-famille de la base $(f_1, \dots, f_p)$.

D'après le corollaire 18.1.5, ceci implique que l'application f est injective.

2. • Supposons qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective.

D'après le corollaire précédent, on a $\text{rg}(f) = \dim(F)$ donc en appliquant le théorème du rang, on obtient

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(F) \geq \dim(F).$$

- Supposons que $\dim(E) \geq \dim(F)$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F avec

$$\dim(E) = n \geq p = \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire définie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$f(e_k) = \begin{cases} f_k & \text{si } k \leq p \\ f_p & \text{si } k \geq p+1 \end{cases}$$

(loisible car $n \geq p$).

On a alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) = F$, ce qui prouve que f est surjective.

■

Remarque 19. On a déjà vu qu'il existait une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Corollaire 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors

f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.

Démonstration. On a $\dim(E) = \dim(F)$.

D'après le corollaire précédent, on a les équivalences suivantes :

f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ est bijective. ■

Remarque 20. Le résultat est vrai en particulier si $E = F$, c'est à dire qu'il suffit qu'un endomorphisme soit injectif (ou surjectif) pour être bijectif.

Par exemple, si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifient $g \circ f = \text{Id}_E$, alors f est injective donc bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 12. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - 2y, x)$.

$$\text{On a } (x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ donc } \ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

Ainsi f est injective et puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

18.2.3 Rang d'une composée d'applications linéaires

Proposition 15: Majoration du rang d'une composée d'application linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

Démonstration.

- Montrons que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$. Pour cela, montrons que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ donc $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Il en découle que $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\operatorname{Im}(g))$, i.e. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g)$.

• Montrons que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f)$. Pour cela, montrons que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

Soit $x \in \ker(f)$, i.e. $f(x) = 0_F$. Par linéarité de g , on alors $g \circ f(x) = g(0_F) = 0_G$ donc $x \in \ker(g \circ f)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

Il en découle que $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\ker(g \circ f))$.

D'après le théorème du rang, on a alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(E) - \dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \operatorname{rg}(f).$$

Finalement, on a montré que $\begin{cases} \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g) \\ \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f) \end{cases}$ d'où $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$. ■

Proposition 16: Invariance du rang d'une application linéaire par composition par un isomorphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie G et $g \in \mathcal{L}(G, E)$ tels que g soit un isomorphisme.

Alors $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$.

2. On suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie G et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ tels que g soit un isomorphisme.

Alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Démonstration.

1. Montrons que $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)$.

• On a montré dans la proposition précédente qu'on a toujours $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$.

• Montrons l'inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f \circ g)$.

Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque g est un isomorphisme de G vers E , il existe un (unique) vecteur $z \in G$ tel que $x = g(z)$ donc $y = f(g(z)) = (f \circ g)(z) \in \operatorname{Im}(f \circ g)$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f \circ g)$.

Finalement, on a bien l'égalité $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)$.

A fortiori, $\operatorname{rg}(f \circ g) = \dim(\operatorname{Im}(f \circ g)) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$.

2. Montrons que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.

• On a montré dans la proposition précédente que l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ est toujours vraie.

• Montrons l'inclusion $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.

Soit $x \in \ker(g \circ f)$. On a $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0_G$ donc $f(x) \in \ker(g)$.

Or, g est un isomorphisme, a fortiori g est injective donc $\ker(g) = \{0_F\}$, ce qui implique que $f(x) = 0_F$, i.e. $x \in \ker(f)$, d'où l'inclusion $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.

Finalement, on a bien l'égalité $\ker(f) = \ker(g \circ f)$. A fortiori, $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g \circ f))$.

D'après le théorème du rang, puisque $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, on a

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(E) - \dim(\ker(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \operatorname{rg}(f).$$

■

18.3 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 10: Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n - 1$.

Exemple 13. • Les droites vectorielles sont des hyperplans de $\mathbb{R}^2$.

• Les plans vectoriels sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 21. Si H est un hyperplan de E , il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$. Ceci découle de l'existence d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel.

En fait, n'importe quelle droite vectorielle non contenue dans H est un supplémentaire de H dans E .

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Soit H un hyperplan de E . Soit D une droite vectorielle de E non contenue dans H .
Alors $E = H \oplus D$.

Démonstration. • Montrons que $H \cap D = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset H \cap D$ est évidente puisque $H \cap D$ est un sous-espace vectoriel de E .

Réciproquement, soit $x \in H \cap D$. Supposons par l'absurde que $x \neq 0_E$. Puisque $x \in D$, on a $\text{Vect}(x) \subset D$. Or, $\dim(D) = \dim(\text{Vect}(x)) = 1$ donc $\text{Vect}(x) = D$.

Puisque $x \in H$, on a également $D = \text{Vect}(x) \subset H$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, $x = 0_E$, ce qui prouve l'inclusion $H \cap D \subset \{0_E\}$ puis l'égalité $H \cap D = \{0_E\}$.

On en déduit que H et D sont en somme directe.

• Montrons que $E = H \oplus D$.

On a $H \oplus D \subset E$ et $\dim(H \oplus D) = \dim(H) + \dim(D) = \dim(E) - 1 + 1 = \dim(E)$ donc finalement, on a bien $H \oplus D = E$. ■

Proposition 18: Caractérisation des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Soit H un sous-espace vectoriel de E .
Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$.

Démonstration. • Supposons que H est un hyperplan de E . Soit x_0 un vecteur de E tel que $x_0 \notin H$ (possible car $H \neq E$ puisque $\dim(H) = \dim(E) - 1$).

Soit $D = \text{Vect}(x_0)$. Puisque $x_0 \notin H$, la droite D n'est pas contenue dans H donc d'après la proposition précédente, $E = H \oplus D$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_H, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = x_H + \lambda_x x_0$.

Considérons la forme linéaire $f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_x \end{matrix}$ où λ_x est le scalaire défini ci-dessus. On montre facilement que f est une forme linéaire non nulle (puisque $f(x_0) = 1$) et que $\ker(f) = H$.

• Supposons qu'il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$.

Puisque f est non nulle, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$.

D'après le théorème du rang, on a alors

$\dim(H) = \dim(\ker(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathbb{K}) = \dim(E) - 1$
donc H est un hyperplan de E . ■

Remarque 22. On a montré au passage que toute forme linéaire non nulle est surjective.

Exemple 14. • Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{matrix}$. Le noyau de la forme linéaire f est l'hyperplan (c'est à dire le plan de $\mathbb{K}^3$) H d'équation $x + y + z = 0$.

• Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{matrix}$.

Le noyau de f est $H = \{aX^2 + bX, (a, b) \in \mathbb{K}^2\} = \text{Vect}(X, X^2)$.

On a bien $\dim(H) = 2 = 3 - 1 = \dim(\mathbb{K}_2[X]) - 1$.

Proposition 19: Equations d'un hyperplan dans une base en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit H un hyperplan de E .

Il existe des scalaires $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

Démonstration. Puisque H est un hyperplan de E , il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$. Posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = f(e_i) \in \mathbb{K}$. Les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne peuvent pas être tous nuls : en effet, une application linéaire étant entièrement déterminée par les images d'une base, s'ils étaient tous nuls, la forme linéaire f serait nulle ce qui est contraire à notre hypothèse.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe des scalaires (uniques) $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a alors les équivalences suivantes :

$$x \in H \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

Exemple 15. • Soit D une droite vectorielle incluse dans $\mathbb{R}^2$. Il existe des scalaires $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) \in D \Leftrightarrow ax + by = 0$.

• Soit P un plan vectoriel inclus dans $\mathbb{R}^3$. Il existe des scalaires $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y, z) \in P \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$.

• Soit $E = \mathbb{K}_2[X]$ et $H = \text{Vect}(X, X^2)$.

Alors $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in H \Leftrightarrow a_0 = 0$.