

Liste d'exercices n°19

Matrices et applications linéaires

Exercice 1. Expliciter l'application linéaire canoniquement associée à chacune des matrices suivantes, puis donner son image et son noyau.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 20 \\ 7 & 35 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0_{n,1}$. Montrer que $A = 0_{n,p}$.

Exercice 3. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on pose

$$\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_3 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Expliciter les endomorphismes f , g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
 - (a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = A$;
 - (b) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) = A$;
 - (c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) = A$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image des endomorphismes f , g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
 - (a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = B$;
 - (b) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) = B$;
 - (c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(h) = B$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

1. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.
2. Soit $F = \text{Vect}\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. Vérifier que F est stable par f et donner la matrice de $f|_F$ dans la base $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$. Quel est le rang de cette matrice ?

Exercice 5. On introduit les vecteurs dans $E = \mathbb{R}^5$ et la matrice suivants :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On désignera par $u : E \rightarrow E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A .

1. Montrer que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est une base de E .
2. Soit F (resp. G) le sous-espace de E engendré par f_1, f_2 (resp. f_3, f_4). Vérifier que F et G sont en somme directe.
3. Montrer que f_5 n'appartient pas à $F + G$; en déduire que si l'on note H la droite engendrée par f_5 , alors $E = F \oplus G \oplus H$.
4. Montrer que les sous-espaces F , G et H sont stables par l'application u (i.e. $\forall x \in F, u(x) \in F$ etc.).
5. Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ et calculer son inverse P^{-1} .
6. En utilisant la formule de changement de base, calculer A' la matrice de u dans la base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.
7. Comment lit-on sur la matrice A' le fait que F , G et H sont stables par u ?

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $A^3 - 2A^2 + A - 2I_3 = 0$.
2. En déduire que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f .

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $\ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 et trouver deux réels x et y tels que le vecteur $(1, x, y)$ en constitue une base.
2. Montrer que $\ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 2 et trouver quatre réels s, t, u et v tels que $((1, s, t), (1, u, v))$ en soit une base.
3. On pose $\mathcal{B} = ((1, x, y), (1, s, t), (1, u, v))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D de f dans cette base.

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Montrer que l'application f est un automorphisme et expliciter f^{-1} .

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On pose $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (4, 2, 1)$, et on appelle $\mathcal{B}$ la famille (u_1, u_2, u_3) .

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout entier naturel n , expliciter l'application f^n .

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n + 1$ réels distincts $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire et écrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Prouver que φ est un isomorphisme.

Exercice 11. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que $AB = 0$ et que $A + B$ est inversible.

Montrer que $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) = n$.

Exercice 12.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0_{n,1}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A A^T)$.