

19.1 Matrice d'une application linéaire

19.1.1 Définition

Définition 1: Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension n et p respectivement.

Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ des bases respectives de E et F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq p}$ uniquement déterminés tels que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,j} f_i.$$

La matrice de terme général $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est appelée matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on la note $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Dans le cas où f est un endomorphisme de E et où $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Remarque 1. Autrement dit, la matrice de f dans les bases $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la matrice dont la j -ème colonne est la matrice colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Exemple 1. • Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p .

La matrice de l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ de E et de F est la matrice nulle $0_{p,n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

• Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda \text{Id}_E) = \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$.

On a $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1)$.

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{C} = ((2, -1), (1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(1, 1, 1) = (0, 3) = -(2, -1) + 2(1, 1)$; $f(0, -1, 1) = (1, 0) = \frac{1}{3}(2, -1) + \frac{1}{3}(1, 1)$ et $f(1, 0, 1) = (1, 2) = -\frac{1}{3}(2, -1) + \frac{5}{3}(1, 1)$.

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

- Considérons le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{C}$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, i)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons l'application linéaire $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{matrix}$ qui correspond géométriquement à la rotation d'angle θ . En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|e^{i\theta} z| = |z|$ et $\arg(e^{i\theta} z) \equiv \arg(z) + \theta[2\pi]$.

On a $f(1) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $f(i) = e^{i\theta} i = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On nomme cette matrice R_θ , puisqu'elle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}$ de la rotation d'angle θ .

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , i.e. $E = F \oplus G$. Notons $q = \dim(F)$ et $r = \dim(G)$. Ainsi, $q + r = n$. Soit $(f_1, \dots, f_q)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_r)$ une base de G . Puisque $E = F \oplus G$, on sait que la concaténation $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de E .

Notons p la projection sur F parallèlement à G . On sait que pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $p(f_i) = f_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p(g_i) = 0_E$ donc la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_q & 0_{q,r} \\ 0_{r,q} & 0_r \end{pmatrix}$.

Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On sait que pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $s(f_i) = f_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $s(g_i) = -g_i$ donc la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_q & 0_{q,r} \\ 0_{r,q} & -I_r \end{pmatrix}$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. La matrice A peut représenter une infinité d'applications

linéaires si on ne fixe pas d'espaces vectoriels ou de bases.

En revanche, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ soit égale à A .

En effet, dans ce cas, on a nécessairement $f(1, 0) = (1, 2, 4)$ et $f(0, 1) = (-1, 3, -2)$ donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(1, 2, 4) + y(-1, 3, -2) = (x - y, 2x + 3y, 4x - 2y),$$

ce qui détermine de façon unique l'application linéaire f .

On dit que f est l'application linéaire canoniquement associée à A .

Définition 2: Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement.

L'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est appelée l'application linéaire canoniquement associée à A .

Remarque 2. L'unicité de l'application f résulte du théorème dit de caractérisation d'une application linéaire. En effet, les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont alors uniquement déterminées par les coefficients de la matrice et les images des vecteurs d'une base suffisent à déterminer entièrement une application linéaire.

Dans ce cas, comme vu dans l'exemple précédent, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de A , alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $C_j = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_j))$.

Proposition 1: Calcul matriciel de l'image d'un vecteur

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $x \in E$.

Alors on a l'égalité matricielle

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$.

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et Y la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$, et montrons que $Y = AX$.

Tout d'abord, notons que $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. D'autre part, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc on a également $AX \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Par définition des matrices coordonnées, on a $x = \sum_{j=1}^n X_{j,1} e_j$. Donc par linéarité de f , on a

$$f(x) = \sum_{j=1}^n X_{j,1} f(e_j) = \sum_{j=1}^n X_{j,1} \sum_{i=1}^p A_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} X_{j,1} \right) f_i = \sum_{i=1}^p (AX)_{i,1} f_i.$$

Or, encore par définition des matrices coordonnées, on a $f(x) = \sum_{i=1}^p Y_{i,1} f_i$. Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(AX)_{i,1} = Y_{i,1}$ d'où $AX = Y$. ■

Exemple 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (y, -x + y, x)$. La matrice de f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dont la matrice des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit Y la matrice des coordonnées de $f(x, y)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après la proposition précédente, on a

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien que $f(x, y) = (y, -x + y, x)$.

• Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle sur E . Si $\mathcal{C} = (1)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = (a_1 \dots a_n)$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_j) = a_j$.

Soit $x \in E$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Soit H l'hyperplan de E défini par $H = \ker(f)$. On retrouve une équation de l'hyperplan H , i.e.

$$x \in H = \ker(f) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

19.1.2 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

Proposition 2: Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$.

Par définition, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^p A_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^p B_{i,j} f_i.$$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) = \sum_{i=1}^p (\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}) f_i = \sum_{i=1}^p (\lambda A + \mu B)_{i,j} f_i.$$

Par définition, ceci implique que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g))_{i,j} = (\lambda A + \mu B)_{i,j}$$

d'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda A + \mu B = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$. ■

Théorème 1: Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F)$.

Remarque 3. Autrement dit, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, étant donnés des espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et p , étant données des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F respectivement, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A$.

Par exemple, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ est égale à A : c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A .

Démonstration. Dans toute la preuve, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$.

• Tout d'abord, vérifions que φ est bien une application linéaire.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. D'après la proposition précédente, on a

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

donc φ est bien une application linéaire.

• Montrons maintenant que l'application φ est bijective. Soit $A \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A$.

Par définition, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^p A_{i,j} f_i.$$

Or, la donnée des images des vecteurs d'une base de E détermine entièrement l'application f , donc il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_j) =$

$\sum_{i=1}^p A_{i,j} f_i$, i.e. il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A$, ce

qui prouve la bijectivité de φ . ■

Remarque 4. Ainsi, pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie,

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E),$$

d'où $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \simeq E$. Autrement dit, l'espace des formes linéaires sur E est de même dimension que E .

Proposition 3: Matrice d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_q)$.

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)$. Montrons que $C = BA$.

Tout d'abord, on remarque que $C \in \mathcal{M}_{q, n}(\mathbb{K})$. D'autre part, $B \in \mathcal{M}_{q, p}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$ donc $BA \in \mathcal{M}_{q, n}(\mathbb{K})$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par définition, on a $f(e_j) = \sum_{k=1}^p A_{k,j} f_k$ donc par linéarité de g ,

$$(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^p A_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^p A_{k,j} g(f_k) = \sum_{k=1}^p A_{k,j} \sum_{i=1}^q B_{i,k} g_i = \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^p (B_{i,k} A_{k,j}) g_i$$

$$\text{d'où } (g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^q (BA)_{i,j} g_i.$$

$$\text{Or, par définition, } (g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^q C_{i,j} g_i.$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_{i,j} = (BA)_{i,j}$ d'où $C = BA$. ■

Exemple 3. • Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (y - z, x + y)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (y, x, x + y)$.

La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$ d'où

$$(g \circ f)(x, y, z) = (x + y, y - z, x + 2y - z).$$

De même, la matrice de $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x + y \end{pmatrix}$ d'où

$$(f \circ g)(x, y) = (-y, x + y).$$

• Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Soient f et g les endomorphismes du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ définis comme les rotations d'angle θ et θ' respectivement. Soit $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(g \circ f)(z) = (f \circ g)(z) = e^{i\theta} e^{i\theta'} z = e^{i(\theta + \theta')} z$. Ainsi, $g \circ f$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = R_{\theta + \theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix}$.

On remarque qu'on a bien

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') & -\sin(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta') \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta') \cos(\theta) & \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f). \end{aligned}$$

Corollaire 1: Matrice des puissances successives d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B}$ une base de E .

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n.$$

Démonstration. Soit $p = \dim(E)$.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Pour $n = 0$, $f^0 = \text{Id}_E$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n$. Montrons la propriété au rang $n + 1$.

D'après la proposition précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{n+1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n \circ f) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence. ■

Exemple 4. • Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -8 & -1 & -9 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

• Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = A^2 = A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ donc $f^2 = f$, ce qui permet d'affirmer que f est un projecteur.

Corollaire 2: Matrice d'un isomorphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible et dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

Remarque 5. On remarque que s'il existe un isomorphisme f entre E et F , les espaces E et F sont nécessairement de même dimension, donc la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est bien une matrice carrée, ce qui est la moindre des choses pour une matrice inversible !

Démonstration. Soit $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

• Supposons que f est un isomorphisme. Nécessairement $\dim(E) = \dim(F)$ d'où $n = p$. On sait que sa bijection réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E .

Puisque $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$, on obtient par composition

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

et

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_F) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}),$$

ce qui prouve que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible et que $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}$.

• Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$. Supposons que A est inversible. Nécessairement $p = n$ et $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

D'après le théorème 19.1.2, il existe une unique application linéaire $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n = A^{-1}A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g)\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_F) = I_n = AA^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g).$$

Toujours d'après le même théorème, puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_F) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g)$, on en déduit que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$, ce qui prouve que f est bijective et $g = f^{-1}$.

En outre, on a bien $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1} = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}$. ■

Exemple 5. • Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après le théorème précédent, f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$ donc $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{-x + y}{2} \right)$.

• Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}z \end{matrix}$ la rotation d'angle θ . Soit $\mathcal{B} = (1, i)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathbb{R}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Cette matrice est inversible d'inverse $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ qui est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle $-\theta$. Ceci prouve que f est un isomorphisme et que f^{-1} est la rotation d'angle $-\theta$.

Nous pouvons désormais montrer une propriété admise dans le chapitre « Matrices » :

Corollaire 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.

Alors on a également $BA = I_n$, i.e. A est inversible et $B = A^{-1}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est B .

On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}) = I_n = AB = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g)$ donc $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

Ainsi, l'application linéaire $f \circ g$ est surjective, donc f est surjective. Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, ceci implique que f est bijective et que la matrice A est inversible. Son inverse A^{-1} vérifie alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ainsi, $B = I_n \times B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$.

Puisque $B = A^{-1}$, on a bien $BA = I_n$. ■

Remarque 6. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, la même preuve montre que B est inversible et que $B^{-1} = A$ donc $B = A^{-1}$.

Exemple 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Puisque $AB = I_3$, on peut affirmer que A est inversible, que $BA = I_3$ et que $B = A^{-1}$.

19.2 Changements de bases

19.2.1 Matrices de passage

Définition 3: Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ uniquement déterminés tels que

$$f_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} e_i.$$

La matrice de terme général $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ et on la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Remarque 7. • C'est la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Il est important de noter que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

Exemple 7. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (2, 3, -2), (-2, 0, 1))$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4: Inverse d'une matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E . Alors la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible et

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}),$$

c'est à dire que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ et que Id_E est un isomorphisme, on en déduit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible et on a

$$(\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{Id}_E))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{Id}_E),$$

i.e. $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. ■

Exemple 8. Reprenons l'exemple précédent.

$$\text{On a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En effet, $(1, 0, 0) = 3(1, -1, 0) + (2, 3, -2) + 2(-2, 0, 1)$, $(0, 1, 0) = 2(1, -1, 0) + (2, 3, -2) + 2(-2, 0, 1)$ et $(0, 0, 1) = 6(1, -1, 0) + 2(2, 3, -2) + 5(-2, 0, 1)$.

Corollaire 4: Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 8. Dans cet énoncé, on identifie implicitement une matrice colonne avec un vecteur de $\mathbb{K}^n$ i.e. on identifie les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, ce qui est possible via le choix d'une base puisqu'ils sont isomorphes car de même dimension. Concrètement, on identifie la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec le n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 9. L'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente au fait que la famille $((1, -1, 0), (2, 3, -2), (-2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. Dans toute la preuve, notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons C_j la j -ème colonne de A et f_j le vecteur de $\mathbb{K}^n$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_j) = C_j$. Enfin, notons $\mathcal{C}$ la famille $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$.

- Supposons que les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$, i.e. la famille $\mathcal{C} = (f_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et, par définition, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. D'après la proposition précédente, on en déduit que A est inversible.

- Réciproquement, supposons que A est inversible. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A , i.e. $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_j) = f_j$. Puisque A est inversible, f est un isomorphisme. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, ceci implique que $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui prouve que les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$. ■

19.2.2 Formules de changement de bases

Proposition 5: Formule de changement de base pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E .

Soit $x \in E$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Démonstration. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{Id}_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_E(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x).$$

■

Exemple 10. Reprenons les exemples précédents.

Soit $x = (1, 2, 3)$, i.e. $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

En effet, $(1, 2, 3) = 25(1, -1, 0) + 9(2, 3, -2) + 21(-2, 0, 1)$.

Proposition 6: Formule de changement de bases pour la matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F . Notons $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$.

Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration. Puisque $f = \text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}') & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{C}') \\ P \downarrow \text{Id}_E & & \text{Id}_F \uparrow Q^{-1} \\ (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{C}) \end{array}$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} B &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{Id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}) \times A \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ &= Q^{-1}AP. \end{aligned}$$

■

Corollaire 5: Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

Notons $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour $E = F, \mathcal{C} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$. On a alors $Q = P$ d'où le résultat. ■

Exemple 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (2x + y, -2x - y)$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On a déjà remarqué que $f^2 = f$ donc f est un projecteur, avec

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{Vect}((2, -2), (1, -1)) = \text{Vect}(1, -1)$$

et

$$\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -2x\} = \{(x, -2x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, -2).$$

Notons $\mathcal{C} = ((1, -1), (1, -2))$ la base de $\mathbb{R}^2$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^2 = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

$$\text{Soit } P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

$$\text{Alors } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4: Matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque 9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La seule matrice semblable à λI_n est λI_n puisque pour toute matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda I_n$.

Proposition 7: Caractérisation des matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont semblables ;
2. Il existe un espace vectoriel E , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

Autrement dit, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans un espace vectoriel donné.

Démonstration. • L'implication $2) \Rightarrow 1)$ a été prouvée dans le corollaire précédent.

• Montrons $1) \Rightarrow 2)$. Supposons que A et B sont semblables, i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et considérons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Notons f l'application linéaire canoniquement associée à A , i.e. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

Puisque P est inversible, on sait que les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$. Notons-la $\mathcal{C}$ et on a alors $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Ainsi, d'après la formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme, on a $B = P^{-1}AP = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, ce qui est le résultat voulu. ■

19.3 Rang d'une matrice

19.3.1 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 5: Noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle noyau de la matrice A l'ensemble

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{n,1}\} \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

Remarque 10. C'est le noyau de l'application linéaire
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

En identifiant $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, c'est l'application linéaire canoniquement associée à A .

En particulier, $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$X \in \ker(A) \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$$

donc $\ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Remarque 11. Les lignes d'une matrice donnent un système d'équations de son noyau.

Définition 6: Image d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle image de la matrice A l'ensemble

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Remarque 12. C'est l'image de l'application linéaire $\begin{matrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$. En particulier, $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons $C_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la j -ème colonne de A .

Alors

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

Autrement dit, l'image d'une matrice est engendrée par ses colonnes.

Démonstration. Notons $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne contenant un 1 en

j -ème ligne et des zéros ailleurs.

Puisque $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, on a

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

■

Exemple 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Définition 7: Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle rang de la matrice A l'entier

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

Remarque 13. • Puisque $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a nécessairement $\text{rg}(A) \leq n$.

• Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A . Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

En effet, si on note $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A , on a par définition

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(A).$$

19.3.2 Propriétés du rang**Théorème 2: Théorème du rang matriciel**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors

$$\dim(\ker(A)) + \text{rg}(A) = p.$$

Démonstration. Reprenons l'application linéaire $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$.

On sait que $\ker(A) = \ker(f)$ et $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$.

D'après le théorème du rang pour les applications linéaires, on a alors

$$\dim(\ker(A)) + \text{rg}(A) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})) = p.$$

■

Remarque 14. Nécessairement, $\text{rg}(A) \leq p$ donc $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Exemple 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$.

On a vu que $\dim(\ker(A)) = 1$ et que $\text{rg}(A) = 1$. On a donc bien $\dim(\ker(A)) + \text{rg}(A) = 2$.

Corollaire 6: Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $C_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la j -ème colonne de A , identifiée à un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$;
3. $\text{rg}(A) = n$;
4. $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathbb{K}^n$.

Remarque 15. Dans l'énoncé précédent, on a encore identifié $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. • Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que A est inversible.

Montrons que $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$. Il est clair que $\{0_{n,1}\} \subset \ker(A)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \ker(A)$.

Puisque $AX = 0_{n,1}$, on a $A^{-1}AX = A^{-1} \times 0_{n,1}$, d'où $X = 0_{n,1}$, ce qui prouve que $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$.

• Montrons que $2) \Rightarrow 3)$. Supposons que $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$.

D'après le théorème du rang matriciel, on a alors $n = \dim(\ker(A)) + \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A)$.

• Montrons que $3) \Rightarrow 4)$. Supposons que $\operatorname{rg}(A) = n$, i.e. $\dim(\operatorname{Im}(A)) = n$.

Puisque $\operatorname{Im}(A) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et que $\dim(\operatorname{Im}(A)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$, on a nécessairement $\operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Or, $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.

Via l'identification $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$, on en déduit que $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathbb{K}^n$.

• Montrons que $4) \Rightarrow 1)$. Supposons que $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathbb{K}^n$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille génératrice à n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ qui est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . La famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de A est donc nécessairement une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui équivaut à l'inversibilité de A . ■

Proposition 9: Lien entre les rangs d'une application linéaire et d'une matrice

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Toutes les application linéaires entre deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n ayant pour matrice A dans un certain couple de bases ont même rang, et ce rang est nécessairement $\operatorname{rg}(A)$.

Démonstration. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n , soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = A$.

Soient E' et F' deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n , soient $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ des bases de E' et F' respectivement. Soit $g \in \mathcal{L}(E', F')$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = A$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ l'application linéaire qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$. C'est un isomorphisme puisque l'image d'une base de E par u est une base de E' .

De même, considérons $v \in \mathcal{L}(F', F)$ l'application linéaire qui envoie la base $\mathcal{C}'$ sur la base $\mathcal{C}$. C'est un isomorphisme puisque l'image d'une base de F' par v est une base de F .

On peut résumer la situation sous la forme du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow[A]{f} & (F, \mathcal{C}) \\ \downarrow u & & \uparrow v \\ (E', \mathcal{B}') & \xrightarrow[A]{g} & (F', \mathcal{C}') \end{array}$$

Notons les bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, \dots, f'_n)$.

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Puisque A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} f_i$.

De même, puisque A est la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, on a

$$(v \circ g \circ u)(e_j) = (v \circ g)(e'_j) = v \left(\sum_{i=1}^n A_{i,j} f'_i \right) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} v(f'_i) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} f_i = f(e_j).$$

Ainsi, les applications linéaires f et $v \circ g \circ u$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$. Or, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base donc $f = v \circ g \circ u$.

Puisque u et v sont des isomorphismes, on a alors

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(v \circ g \circ u) = \operatorname{rg}(v \circ g) = \operatorname{rg}(g),$$

ce qui prouve bien que si f et g ont la même matrice représentative dans des couples de bases différents, f et g ont même rang.

En particulier, si f est l'application linéaire canoniquement associée à A , on a déjà remarqué que $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$ donc toutes les applications linéaires étant représentées par la matrice A ont le même rang que A . ■

Proposition 10: Invariance du rang d'une matrice par multiplication par une matrice inversible

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Alors $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A .

1. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ est B . Puisque B est inversible, g est un isomorphisme donc $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$.

Or, la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est AB . On a donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(AB).$$

2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est B . Puisque B est inversible, g est un isomorphisme donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Or, la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est BA . On a donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(BA).$$

Nous avons donné dans le chapitre « Matrices » une définition de rang différente pour les matrices. Une matrice était dite de rang r si on pouvait l'échelonner et faire apparaître exactement r pivots non nuls. Nous allons maintenant vérifier que cette définition est équivalente à celle donnée ci-dessus.

Rappelons que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice sont les suivantes :

$$L_i \leftrightarrow L_j; \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \text{ si } \lambda \neq 0; \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j;$$

$$C_i \leftrightarrow C_j; \quad C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ si } \lambda \neq 0; \quad C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A conservent l'image de A .
2. Les opérations élémentaires sur les lignes de A conservent le noyau de A .

Démonstration.

1. Effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes de A ne modifie pas l'espace engendré par ces colonnes, puisque ceci revient à faire des combinaisons linéaires sur les colonnes. Or, les colonnes de A engendrent l'image de A . On en déduit que les opérations élémentaires sur les colonnes de A conservent l'image de A .

2. Les lignes de A donnent un système d'équations du noyau de A . Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A revient alors à transformer ce système en un système équivalent, qui contiendra donc le même ensemble de solutions. On en déduit que les opérations élémentaires sur les lignes de A conservent le noyau de A . ■

Proposition 12: Invariance du rang d'une matrice par opérations élémentaires

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Effectuer des opérations élémentaires sur la matrice A ne modifie pas le rang de A .

Démonstration. • Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice A revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de permutation

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $P_{i,j}^{-1} = P_{j,i}$ donc $\text{rg}(P_{i,j}A) = \text{rg}(A)$.

• Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice A revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de dilatation

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$ donc $\text{rg}(D_i(\lambda)A) = \text{rg}(A)$.

• Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice A revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de transvection

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$ donc $\text{rg}(T_{i,j}(\lambda)A) = \text{rg}(A)$.

• Les opérations élémentaires sur les colonnes sont obtenues en multipliant la matrice A à droite par les mêmes matrices de permutation, dilatation et transvection. Or, multiplier à droite par une matrice inversible ne modifie pas le rang donc le raisonnement est le même. ■

Proposition 13: Caractérisation du rang d'une matrice

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $r \in \llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{rg}(A) = r$.
2. Il existe deux matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que

$$A = B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où le nombre de 1 est égal à r .

3. On peut échelonner la matrice A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et

les colonnes pour la mettre sous la forme $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

le nombre de 1 est égal à r .

Démonstration. On effectue un raisonnement circulaire.

- Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2).

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, notées respectivement $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, est A .

Par hypothèse, $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = r$ donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = p - r$.

Soit $(e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ une base de $\ker(f)$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, $f(e'_j) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Complétons-la en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ de $\mathbb{K}^p$. En particulier, $\text{Vect}(e'_1, \dots, e'_r)$ est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{K}^p$.

D'après le théorème du rang géométrique, puisque $f : \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_r) \longrightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme $(f(e'_1), \dots, f(e'_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

Complétons-la en une base $\mathcal{C}' = (f(e'_1), \dots, f(e'_r), f'_{r+1}, \dots, f'_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{On a alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ où le nombre de 1 est}$$

égal à r .

Notons $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque ce sont des matrices de passage entre deux bases, B et C sont inversibles et d'après la formule de changement de bases, on a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = B J_r C.$$

- Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3).

Puisque B est inversible, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir I_n à partir d'opérations élémentaires sur les lignes de B , i.e. en multipliant B à gauche par B^{-1} .

De même, puisque C est inversible, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir I_p à partir d'opérations élémentaires sur les colonnes de C , i.e. en multipliant C à droite par C^{-1} .

Ainsi, en effectuant ces opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A , i.e. en effectuant le produit matriciel $B^{-1}AC^{-1}$, on obtient

$$B^{-1}AC^{-1} = B^{-1}B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} CC^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien réussi à échelonner la matrice A sous la forme voulue.

- Montrons que 3) $\Rightarrow$ 1).

On a montré précédemment que le rang était invariant par opérations élémentaires donc le

rang de A est égal au rang de la matrice $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Or, le rang de cette matrice,

vu comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes, est évidemment égal à r donc $\text{rg}(A) = r$. ■

Remarque 16. • On avait en fait défini le rang d'une matrice dans le chapitre « Matrices » comme le rang de n'importe quel système linéaire associé à cette matrice. On avait également affirmé que des systèmes équivalents (c'est à dire obtenus par opérations élémentaires) avaient même rang. La proposition précédente justifie tout cela.

• Dans le chapitre « Espaces vectoriels », on a défini le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Si on considère la matrice de cette famille dans une base quelconque, le rang de la famille est égal au rang de cette matrice.

En effet, considérons $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{K}^n$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

La matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ est en fait la matrice de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ définie pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ par $f(e_j) = x_j$.

On a alors $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$.

En particulier, $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $p = n$ et $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = n$ si et seulement si $p = n$ et la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_p)$ est inversible.

Toutes les notions de rang (applications linéaires, matrices, systèmes linéaires, familles de vecteurs) coïncident donc et peuvent être calculées en échelonnant des matrices !

• Le rang d'une matrice triangulaire supérieure est égal au nombre de coefficients non nuls sur sa diagonale. Ainsi, on retrouve qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Enfin, nous allons pouvoir démontrer une autre propriété admise dans le chapitre « Matrices » :

Corollaire 7: Invariance du rang par transposition

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 Alors $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.

Démonstration. Soit $r = \text{rg}(A)$. D'après la proposition précédente, il existe deux matrices

inversibles $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

où le nombre de 1 est égal à r .

En prenant la transposée, on obtient $A^T = C^T \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} B^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où

le nombre de 1 est égal à r .

Or, B^T et C^T sont inversibles puisque B et C le sont. L'égalité $A^T = C^T \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} B^T$

implique donc d'après la proposition précédente que $\text{rg}(A^T) = r = \text{rg}(A)$. ■

Remarque 17. Ceci implique en particulier qu'une matrice triangulaire inférieure admet la même condition nécessaire et suffisante d'inversibilité, à savoir que ses coefficients diagonaux doivent tous être non nuls.

19.3.3 Lien avec les systèmes linéaires

Soit (S) un système linéaire à n équations et p inconnues. On sait que ce système peut s'écrire matriciellement $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ où X est à déterminer et B est le second membre du système. On dit que le système est homogène si $B = 0$.

Proposition 14: Solutions d'un système homogène

Soit (H) un système homogène dont l'écriture matricielle est $AX = 0$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors $AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X \in \ker(A)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de H est $\ker(A)$.

Le rang du système vaut $\text{rg}(A)$ et l'ensemble des solutions du système est un espace vectoriel de dimension

$$\dim(\ker(A)) = p - \text{rg}(A).$$

Remarque 18. Un système de la forme $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$ et on a vu que dans ce cas, l'ensemble des solutions est $X_0 + \ker(A)$, où $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution particulière du système $AX = B$.

Proposition 15: Résolution d'un système carré

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que $B \in \text{Im}(A)$.

Le système $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si A est inversible et dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Démonstration. Puisque $B \in \text{Im}(A)$, il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0 = B$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $AX = B$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow \mathcal{S} = X_0 + \ker(A) = \{X_0\}.$$

■