

## Corrigé de la liste d'exercices n°18

## Applications linéaires

### Exercice 1

1. L'application  $f$  n'est pas linéaire car  $f(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ .

2. • Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$  et  $(\lambda, \mu)$  deux réels. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda(x - y) + \mu(x' - y'), \lambda(x + 3y) + \mu(x' + 3y'), \lambda x + \mu x') \\ &= \lambda(x - y, x + 3y, x) + \mu(x' - y', x' + 3y', x') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

$$\bullet \text{ On a } (x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ donc } \ker(f) = \{(0, 0)\} \text{ d'où}$$

$\dim(\ker(f)) = 0$  (donc  $f$  est injective).

• On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(x - y, x + 3y, x) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1, 1) + y(-1, 3, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, 3, 0)\}. \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs  $(1, 1, 1)$  et  $(-1, 3, 0)$  sont libres (car non colinéaires), on en déduit que  $\dim(\text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, 3, 0)\}) = 2$  d'où  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ .

3. On a  $f(1, 0) = (0, 0)$ ,  $f(-1, 0) = (2, 0)$  et  $f(0, 0) = (0, 0)$ .

Ainsi,  $f((1, 0) + (-1, 0)) = f(0, 0) = (0, 0) \neq f(1, 0) + f(-1, 0) = (2, 0)$  donc l'application  $f$  n'est pas linéaire.

4. • Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $u = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ ,  $v = (x', y', z') \in \mathbb{C}^3$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .

Alors

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = \lambda z + \mu z' - (\lambda y + \mu y') = \lambda(z - y) + \mu(z' - y') = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

donc  $f$  est linéaire.

• On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow z - y = 0 \Leftrightarrow y = z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1)$$

donc  $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ . Puisque les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 1)$  sont libres (car non colinéaires), on en déduit que  $\dim(\ker(f)) = 2$ .

• Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors  $z = f(0, 0, z)$  donc l'application  $f$  est surjective d'où  $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ .

5. L'application  $f$  n'est pas linéaire car  $f(0, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$ .

6. On a  $f(1, 1) = (8, 1, 1)$  et  $f(-1, -1) = (-8, 1, -1)$  donc

$$f(-1, -1) = f(-(1, 1)) \neq -f(1, 1)$$

ce qui prouve que  $f$  n'est pas linéaire.

7. • Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(x + y) + \mu(x' + y'), \lambda(x - y) + \mu(x' - y')) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

• On a  $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$  donc  $\ker(f) = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$  d'où  $\dim(\ker(f)) = 1$ .

• On a

$$\text{Im}(f) = \{(x+y, x-y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1) + y(1, -1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1), (1, -1)\}$$

donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$  (puisque les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  ne sont pas colinéaires).

8. On a  $f(1, 0) = (1, 0) = f(-1, 0)$  donc  $f(-1, 0) = f(-(1, 0)) \neq -f(1, 0)$ , ce qui prouve que  $f$  n'est pas linéaire.

9. • Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ , et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(3x - y) + \mu(3x' - y'), \lambda(y + 5z) + \mu(y' + 5z'), \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(3x - y, y + 5z, y) + \mu(3x' - y', y' + 5z', y') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

• On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + 5z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

donc  $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$  d'où  $\dim(\ker(f)) = 0$  et  $f$  est injective.

• On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(3x - y, y + 5z, y) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(3, 0, 0) + y(-1, 1, 1) + z(0, 5, 0) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(3, 0, 0), (-1, 1, 1), (0, 5, 0)\}. \end{aligned}$$

Montrons que la famille  $\{(3, 0, 0), (-1, 1, 1), (0, 5, 0)\}$  est libre.

Soient  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\alpha(3, 0, 0) + \beta(-1, 1, 1) + \gamma(0, 5, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ \beta + 5\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

C'est une famille libre constituée de trois vecteurs libres dans  $\mathbb{R}^3$  : c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ . On en déduit que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 3$  (et  $f$  est surjective).

10. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(a^2x - y) + \mu(a^2x' - y'), \lambda y + \mu y', 0) \\ &= \lambda(a^2x - y, y, 0) + \mu(a^2x' - y', y', 0) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

- On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si  $a \neq 0$ , on a  $x = y = 0$  donc  $\ker(f) = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$  donc  $\dim(\ker(f)) = 1$ .

- Si  $a = 0$ , alors  $\ker(f) = \{(x, 0, z) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  donc  $\dim(\ker(f)) = 2$  (puisque les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  ne sont pas colinéaires).

- On a  $\text{Im}(f) = \{(a^2x - y, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(a^2, 0, 0) + y(-1, 1, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(a^2, 0, 0), (-1, 1, 0)\}$ .

Deux cas se présentent alors :

- Si  $a \neq 0$ , alors les vecteurs  $(a^2, 0, 0)$  et  $(-1, 1, 0)$  ne sont pas colinéaires donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ .

- Si  $a = 0$ , alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(-1, 1, 0)\}$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ .

## Exercice 2

Par hypothèse, pour tout  $x \in E$ , les vecteurs  $x$  et  $f(x)$  sont colinéaires.

Si  $x = 0$ , c'est évident car  $f(x) = x = 0_E$ .

Si  $x \neq 0_E$ , ceci signifie qu'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x) = \lambda x$ . A priori, ce scalaire  $\lambda$  dépend du choix du vecteur  $x$ . On va montrer qu'on peut en fait choisir le même  $\lambda$  pour tous les vecteurs  $x$  de l'espace vectoriel  $E$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ .

Il existe donc deux scalaires  $(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{K}^2$  tels que  $f(x) = \lambda_x x$  et  $f(y) = \lambda_y y$ .

Montrons que  $\lambda_x = \lambda_y$ .

Il y a deux cas.

- Supposons que les vecteurs  $x$  et  $y$  soient colinéaires, i.e. il existe un scalaire  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $y = \alpha x$ . Notons qu'on a nécessairement  $\alpha \neq 0$  car  $y \neq 0$ .

Alors par linéarité de  $f$ , on a  $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$ .

D'autre part, on a  $f(y) = \lambda_y y = \alpha \lambda_y x$ .

Donc  $\alpha \lambda_x x = \alpha \lambda_y x$ , d'où  $(\lambda_x - \lambda_y)\alpha x = 0_E$ . Or,  $\alpha x \neq 0_E$  car  $\alpha \neq 0$  et  $x \neq 0_E$  donc  $\lambda_x - \lambda_y = 0$  d'où  $\lambda_x = \lambda_y$ .

- Supposons que les vecteurs  $x$  et  $y$  ne soient pas colinéaires, i.e. la famille  $(x, y)$  est libre.

Par hypothèse, il existe un scalaire  $\lambda_{x+y} \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ .

Par ailleurs, par linéarité de  $f$ , on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par unicité des coordonnées dans une famille libre, on a  $\lambda_x = \lambda_{x+y}$  et  $\lambda_y = \lambda_{x+y}$  donc  $\lambda_x = \lambda_y$ . Dans tous les cas, pour tout couple de vecteurs  $(x, y)$  non nuls, on a  $\lambda_x = \lambda_y$  donc il existe un  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \lambda x$ .

L'égalité restant trivialement vraie pour  $x = 0_E$  (car  $f(x) = 0_E$ ), on a bien montré l'existence d'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda x$ .

### Exercice 3

1. On a pour tout  $y \in E$ ,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(-y' + 3y) \\ &= (-y' + 3y)' - 2(-y' + 3y) \\ &= -y'' + 5y' - 6y.\end{aligned}$$

Ainsi  $\ker(f \circ g)$  est constitué des fonctions  $y \in E$  telles que  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

2. On a calculé  $f \circ g$  en question précédente. Calculons maintenant  $g \circ f$ . Soit  $y \in E$ . On a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(y) &= g(y' - 2y) \\ &= -(y' - 2y)' + 3(y' - 2y) \\ &= -y'' + 5y' - 6y \\ &= (f \circ g)(y).\end{aligned}$$

Montrons que  $\ker(f) \subset \ker(f \circ g)$ . Soit  $y \in \ker(f)$ . Alors  $f(y) = 0$ , donc  $(g \circ f)(y) = 0$ . Or,  $f \circ g = g \circ f$  donc  $(f \circ g)(y) = 0$ , ce qui implique que  $y \in \ker(f \circ g)$ . Donc on a bien  $\ker(f) \subset \ker(f \circ g)$ .

Montrons maintenant que  $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$ . Soit  $y \in \ker(g)$ . Alors  $g(y) = 0$  donc  $(f \circ g)(y) = 0$ , ce qui assure que  $y \in \ker(f \circ g)$ . Ainsi, on a bien  $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$ .

On remarque facilement que pour tout  $y \in E$ , on a  $f(y) + g(y) = y$ . D'après cette relation, si  $y \in \ker(f) \cap \ker(g)$ , alors nécessairement  $y = 0$ . On en déduit que  $\ker(f)$  et  $\ker(g)$  sont en somme directe.

Il reste à prouver que  $\ker(f \circ g) = \ker(f) + \ker(g)$ . Soit  $y \in \ker(f \circ g)$ . Utilisons de nouveau la décomposition  $y = f(y) + g(y)$ . Montrons alors que  $f(y) \in \ker(g)$ .

En effet, on a  $g(f(y)) = (f \circ g)(y) = 0$  puisque  $y \in \ker(f \circ g)$ . Ainsi, on a bien  $f(y) \in \ker(g)$ .

De même,  $g(y) \in \ker(f)$  puisque  $(f \circ g)(y) = 0$  par hypothèse.

Ainsi,  $y = f(y) + g(y) \in \ker(f) + \ker(g)$ .

On a donc bien prouvé que  $\ker(f \circ g) = \ker(f) + \ker(g)$ . Puisqu'on a déjà montré que la somme était directe,

on a donc bien  $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ .

3. D'après le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1,  $\ker(f)$  est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction  $y : x \mapsto e^{2x}$ . De même,  $\ker(g)$  est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction  $y : x \mapsto e^{3x}$ .

L'ensemble des solutions réelles de  $(D)$ , i.e. le noyau de  $f \circ g$  est donc un espace vectoriel réel de dimension 2 et constitué des fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

## Exercice 4

- Supposons que  $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$  et montrons que  $\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$ .

L'inclusion  $\{0_F\} \subset \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$  est évidente. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit  $x \in \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ . Par hypothèse, on a  $g(x) = 0_G$  et il existe  $u \in E$  tel que  $x = f(u)$  donc  $0_G = g(x) = g \circ f(u)$ , i.e.  $u \in \ker(g \circ f)$ . Or, par hypothèse,  $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$  donc  $u \in \ker(f)$ , i.e.  $x = f(u) = 0_F$ , ce qui prouve que  $\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_F\}$  et finalement  $\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$ .

• Réciproquement, supposons que  $\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$  et montrons que  $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$ .

Soit  $x \in \ker(g \circ f)$ , i.e.  $g(f(x)) = 0_G$ . Ainsi,  $f(x) \in \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$  par hypothèse donc  $f(x) = 0_F$ , i.e.  $x \in \ker(f)$ . On a donc bien prouvé l'inclusion  $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$ .

- Supposons que  $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$  et montrons que  $\ker(g) + \operatorname{Im}(f) = F$ . On a clairement  $\ker(g) + \operatorname{Im}(f) \subset F$ . Montrons l'inclusion réciproque.

Soit  $x \in F$ . On a  $g(x) \in \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$  par hypothèse donc il existe  $u \in E$  tel que  $g(x) = g \circ f(u)$ . Par linéarité de  $g$ , ceci implique que  $g(x - f(u)) = 0_G$ , i.e.  $x - f(u) \in \ker(g)$ .

Ainsi,  $x = \underbrace{x - f(u)}_{\in \ker(g)} + \underbrace{f(u)}_{\in \operatorname{Im}(f)} \in \ker(g) + \operatorname{Im}(f)$  donc  $\ker(g) + \operatorname{Im}(f) = F$ .

• Réciproquement, supposons que  $\ker(g) + \operatorname{Im}(f) = F$ . Montrons que  $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ .

Soit  $y \in \operatorname{Im}(g)$ , i.e. il existe  $x \in F$  tel que  $y = g(x)$ . Puisque  $F = \ker(g) + \operatorname{Im}(f)$ , il existe  $(x_1, x_2) \in \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$  tel que  $x = x_1 + x_2$  et puisque  $x_2 \in \operatorname{Im}(f)$ , il existe  $a \in E$  tel que  $f(a) = x_2$ .

Ainsi, par linéarité de  $g$ , on a

$$y = g(x) = \underbrace{g(x_1)}_{=0_G \text{ car } x_1 \in \ker(g)} + g(x_2) = g \circ f(a) \in \operatorname{Im}(g \circ f),$$

ce qui prouve l'inclusion  $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ .

## Exercice 5

- Soit  $x \in \ker(f)$ , i.e.  $f(x) = 0_E$ . Puisque  $f \circ g = g \circ f$ , on a

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$$

donc  $g(x) \in \ker(f)$ , ce qui prouve que  $\ker(f)$  est stable par  $g$ .

• Soit  $y \in \operatorname{Im}(f)$ , i.e. il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . On a alors

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im}(f)$$

ce qui prouve que  $\operatorname{Im}(f)$  est stable par  $g$ .

- On suppose dorénavant que  $f$  est un projecteur et que  $\ker(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont stables par  $g$ . Montrons que  $f \circ g = g \circ f$ .

Soit  $x \in E$ . Puisque  $f$  est un projecteur, on a  $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$  donc il existe un couple  $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f)$  tel que  $x = x_1 + x_2$ . Puisque  $x_1 \in \ker(f)$ ,  $f(x_1) = 0_E$  et puisque  $x_2 \in \operatorname{Im}(f) = \ker(f - \operatorname{Id}_E)$ ,  $f(x_2) = x_2$ .

Ainsi, par linéarité de  $f$  et  $g$ , on a

$$g \circ f(x) = g \circ f(x_1) + g \circ f(x_2) = g(x_2).$$

D'autre part, puisque  $\ker(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont stables par  $g$ , on a  $g(x_1) \in \ker(f)$  et  $g(x_2) \in \operatorname{Im}(f)$  donc  $f(g(x_1)) = 0_E$  et  $f(g(x_2)) = g(x_2)$  d'où

$$f \circ g(x) = f \circ g(x_1) + f \circ g(x_2) = g(x_2) = g \circ f(x)$$

ce qui prouve que

$$f \circ g = g \circ f.$$

## Exercice 6

- Supposons que  $p+q$  est un projecteur. On a alors  $p \circ p = p$ ,  $q \circ q = q$  et  $(p+q) \circ (p+q) = p+q$  d'où

$$p+q = (p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + p \circ q + q \circ p + q$$

et il s'ensuit que

$$p \circ q + q \circ p = 0. \quad (*)$$

En composant la relation  $(*)$  par  $p$  à gauche, on trouve  $p \circ p \circ q + p \circ q \circ p = p \circ q + p \circ q \circ p = 0$  d'où  $p \circ q = -p \circ q \circ p$ .

De même, en composant  $(*)$  par  $p$  à droite, on trouve  $p \circ q \circ p + q \circ p \circ p = p \circ q \circ p + q \circ p = 0$  d'où  $q \circ p = -p \circ q \circ p = p \circ q$  et la relation  $(*)$  permet alors de conclure que  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

- Réciproquement, supposons que  $p \circ q = q \circ p = 0$ . On a alors

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p+q$$

donc  $p+q$  est un projecteur.

- Supposons que  $\ker(p) = \ker(q)$ . Montrons que  $p = p \circ q$ .

Puisque  $q$  est un projecteur, on a  $E = \ker(q) \oplus \operatorname{Im}(q)$ .

Soit  $x \in E$ . Il existe alors  $(x_1, x_2) \in \ker(q) \times \operatorname{Im}(q)$  tel que  $x = x_1 + x_2$ .

Par linéarité de  $p$ , on a  $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2)$  car  $x_1 \in \ker(q) = \ker(p)$ .

Par ailleurs, puisque  $x_2 \in \operatorname{Im}(q)$ , on a  $q(x_2) = x_2$  donc

$$p \circ q(x) = p(q(x_1)) + p(q(x_2)) = p(x_2) = p(x),$$

ce qui prouve que  $p \circ q = p$ . Par symétrie des rôles joués par  $p$  et  $q$ , on montre de même que  $q = q \circ p$ .

- Réciproquement, supposons que  $p = p \circ q$  et  $q = q \circ p$  et montrons que  $\ker(p) = \ker(q)$ . Soit  $x \in \ker(p)$ , i.e.  $p(x) = 0$ . On a alors  $q(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0_E$  donc  $x \in \ker(q)$ , ce qui prouve l'inclusion  $\ker(p) \subset \ker(q)$ . La relation  $p = p \circ q$  permet de montrer de même que  $\ker(q) \subset \ker(p)$  et on en conclut que  $\ker(p) = \ker(q)$ .

## Exercice 7

La première implication est une conséquence directe du théorème du rang.

Réciproquement, supposons que  $\dim(F) + \dim(G) = n$ .

Notons  $p = \dim(F)$  et  $q = \dim(G)$ .

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $F$ , soit  $(u_i)_{1 \leq i \leq q}$  une base de  $G$ . On complète la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  en une base de  $E$ , qu'on note  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

On va construire une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $\ker(f) = F$  et  $\operatorname{im}(f) = G$  en définissant les images des vecteurs  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  par  $f$ .

On pose

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ u_{i-p} & \text{si } i \geq p+1. \end{cases}$$

On a alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_q) = G$ .

De plus, puisque pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_i \in \ker(f)$ , on en déduit que  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker(f)$ , i.e.  $F \subset \ker(f)$ .

Enfin, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(G) = \dim(F),$$

ce qui permet de conclure que  $\ker(f) = F$ .

## Exercice 8

1. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \ker(f^k)$ . Alors  $f^k(x) = 0_E$  donc par linéarité de  $f$ , on en déduit que  $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$ , ce qui prouve que  $x \in \ker(f^{k+1})$ . On a donc bien l'inclusion  $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ .

- (b) • Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'inclusion  $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$  était stricte, on aurait pour tout  $k \in \mathbb{N}, \dim(\ker(f^k)) < \dim(\ker(f^{k+1}))$ . Pour  $k$  assez grand, on aurait  $\dim(\ker(f^k)) > \dim(E)$ , ce qui est absurde. Nécessairement, il doit exister un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ .

• Montrons alors que pour tout  $k \geq p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$ . Montrons ce résultat par récurrence sur  $k \geq p$ .

- Pour  $k = p$ , le résultat est trivial.

- Soit  $k \geq p$  fixé tel que  $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ . Montrons que  $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$ .

Puisque  $k+1 \geq p$ , on sait d'après la première question que  $\ker(f^p) \subset \ker(f^{k+1})$ .

Montrons que  $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^p)$ .

Soit  $x \in \ker(f^{k+1})$ , i.e.  $f^{k+1}(x) = 0_E$  donc  $f^k(f(x)) = 0_E$ .

Ainsi,  $f(x) \in \ker(f^k) = \ker(f^p)$  par hypothèse de récurrence, donc  $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0_E$ .

Ainsi,  $x \in \ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$ , ce qui prouve bien l'inclusion  $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^p)$  puis l'égalité  $\ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$ .

Par principe de récurrence, on a bien pour tout  $k \geq p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$ .

2. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \text{Im}(f^{k+1})$ . Il existe alors  $a \in E$  tel que  $x = f^{k+1}(a) = f^k(f(a)) \in \text{Im}(f^k)$  donc on a bien l'inclusion  $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ .

- (b) D'après le théorème du rang appliqué à  $f^p$  et à  $f^{p+1}$ , on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f^p)) + \dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1})) + \dim(\text{Im}(f^{p+1})).$$

Puisque  $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ , on en déduit  $\dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(\text{Im}(f^{p+1}))$ . Or, on a l'inclusion  $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$ . On peut donc conclure que  $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$  par égalité des dimensions.

De même, pour tout  $k \geq p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$  et  $\text{Im}(f^k) \subset \text{Im}(f^p)$  donc on conclut une nouvelle fois que  $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$  grâce au théorème du rang.

3. • Soit  $x \in \ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$ . Il existe  $y \in E$  tel que  $x = f^p(y)$  et  $f^p(x) = 0_E$  donc  $f^{2p}(y) = 0_E$ . Ainsi  $y \in \ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$  donc  $x = f^p(y) = 0_E$ , ce qui prouve que  $\ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0_E\}$ .

• Ainsi,  $\ker(f^p)$  et  $\text{Im}(f^p)$  sont en somme directe et d'après le théorème du rang, on a  $\dim(\ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^p)) + \dim(\text{Im}(f^p)) = E$  donc  $\ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$ .

## Exercice 9

- Montrons l'implication  $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$ .

Supposons que  $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ . L'inclusion  $\ker(f) \subset \ker(f^2)$  est toujours vraie et évidente. Montrons que  $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ .

Soit  $x \in \ker(f^2)$ . Alors  $0_E = f^2(x) = f(f(x))$  donc  $f(x) \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0_E\}$  car le noyau et l'image sont en somme directe. On en déduit que  $f(x) = 0_E$ , donc  $x \in \ker(f)$ , ce qui prouve l'inclusion  $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ .

Finalement, on a bien  $\ker(f) = \ker(f^2)$ .

- Montrons l'implication  $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$ .

Supposons que  $\ker(f) = \ker(f^2)$ .

L'inclusion  $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$  est toujours vraie et évidente.

D'après le théorème du rang, on a  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\operatorname{im}(f^2))$ .

Puisque  $\ker(f) = \ker(f^2)$ , on en déduit  $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\operatorname{im}(f^2))$ . Ainsi,  $\operatorname{im}(f)$  et  $\operatorname{im}(f^2)$  ont même dimension, donc l'inclusion  $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$  est en fait une égalité.

- Enfin, montrons l'implication  $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Rightarrow E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ .

Montrons d'abord la somme  $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $f(x) \in \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$  par hypothèse donc il existe  $y \in E$  tel que  $f(x) = f^2(y)$ .

Ainsi, on a  $f(x - f(y)) = 0_E$  d'où  $z = x - f(y) \in \ker(f)$ . On a donc bien  $x = f(y) + z \in \operatorname{im}(f) + \ker(f)$ .

On a donc bien la somme  $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$ .

Ainsi,  $\dim(E) = \dim(\ker(f) + \operatorname{im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) - \dim(\ker(f) \cap \operatorname{im}(f))$ .

Or, d'après le théorème du rang, on a  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$  donc  $\dim(\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)) = 0$ ,

d'où  $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$ , ce qui prouve que la somme est bien directe.

On a donc bien  $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ .

- Notons que ces équivalences ne sont plus forcément vraies en dimension infinie.

Soit  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ .

On a  $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) = \mathbb{K}[X]$  mais  $\ker(f) = \mathbb{K}_0[X]$  et  $\ker(f^2) = \mathbb{K}_1[X]$  donc  $\ker(f) \neq \ker(f^2)$ .

## Exercice 10

- Supposons que  $f \circ f = 0$  et qu'il existe  $h \in \mathcal{L}(E)$ ,  $f \circ h + h \circ f = \operatorname{Id}_E$ .

Montrons tout d'abord que  $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$ .

Soit  $x \in \operatorname{Im}(f)$ . Il existe  $a \in E$  tel que  $x = f(a)$  donc  $f(x) = f \circ f(a) = 0$  puisque  $f \circ f = 0$  par hypothèse donc  $x \in \ker(f)$ , ce qui prouve l'inclusion  $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$ .

Soit  $x \in \ker(f)$ . On a alors  $x = f \circ h(x) + h \circ f(x) = f(h(x)) + h(0_E) = f(h(x)) \in \operatorname{Im}(f)$  donc on a bien l'inclusion  $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$ .

Finalement, on a bien montré l'égalité  $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ .

- Supposons que  $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ .

- Montrons que  $f \circ f = 0$ . Pour tout  $x \in E$ , on a  $f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \ker(f)$  donc  $f(f(x)) = 0_E$ , ce qui prouve que  $f \circ f = 0$ .

- Montrons qu'il existe  $h \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ h + h \circ f = \operatorname{Id}_E$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ . On a alors  $\dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = n$  et d'après le théorème du rang,  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2n$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Puisque  $e_i \in \operatorname{Im}(f)$ , il existe  $u_i \in E$  tel que  $f(u_i) = e_i$ .

Montrons que  $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .



Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{2n}$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$ .

En appliquant  $f$  à cette dernière égalité, on obtient

$$0_E = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Puisque la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\ker(f)$ , c'est une famille libre donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ .

Il reste donc  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$  et pour la même raison, on obtient que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\alpha_i = 0$

donc la famille  $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre à  $2n$  éléments de  $E$  : c'est donc une base de  $E$ .

Construisons alors  $h$  en donnant les images des vecteurs de la base  $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$ .

Posons pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $h(u_i) = 0_E$  et  $h(e_i) = u_i$ . Ceci définit une application  $h \in \mathcal{L}(E)$ .

On a alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$f \circ h(u_i) + h \circ f(u_i) = h(e_i) = u_i \quad \text{et} \quad f \circ h(e_i) + h \circ f(e_i) = f(u_i) = e_i$$

donc  $f \circ h + h \circ f$  et  $\text{Id}_E$  coïncident sur la base  $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$ .

On a donc  $f \circ h + h \circ f = \text{Id}(E)$ .

## Exercice 11

• Si  $f = 0$ , alors  $\text{Im}(f) = \{0\}$  et on a clairement  $\text{Im}(f) \subset P$ .

• On suppose dorénavant que  $f \neq 0$ . Puisque  $f^2 = 0$ , ceci implique que  $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$ .

Or, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 3$  donc  $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f))$  d'où  $\dim(\text{Im}(f)) \leq 3 - \dim(\text{Im}(f))$ , et il s'ensuit que  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \frac{3}{2}$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) \in \{0, 1\}$ .

Puisque  $f \neq 0$ , on a nécessairement  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ .

★ Si  $f$  est nulle sur  $P$ , alors  $P \subset \ker(f)$ . Or,  $\dim(\ker(f)) = \dim(P) = 2$  donc  $\ker(f) = P$  dans ce cas et on a donc bien  $\text{Im}(f) \subset \ker(f) = P$ .

★ Si  $f$  n'est pas nulle sur  $p$ , alors il existe  $x \in P$  tel que  $f(x) \neq 0$ . Puisque  $P$  est stable par  $f$ , alors  $f(x) \in P$ .

Par ailleurs,  $f(x) \in \text{Im}(f) \setminus \{0\}$  et puisque  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ , on en déduit que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x)) \subset P.$$

Dans tous les cas, on a bien montré que  $\text{Im}(f) \subset P$ .

On ne peut pas avoir  $\text{Im}(f) = P$  puisque  $\dim(P) = 2$  et on a montré que  $\dim(\text{Im}(f)) \in \{0, 1\}$ .

## Exercice 12

1. Il est clair que si  $f = \lambda g$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , alors  $\ker(f) = \ker(g)$ .

Réciproquement, supposons que  $\ker(f) = \ker(g)$ . Notons  $H = \ker(f) = \ker(g)$  qui est un hyperplan de  $E$ .

Soit  $x_0 \in E \setminus H$ . La droite  $\mathbb{K}x_0$  n'est pas contenue dans  $H$  donc  $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$ . Puisque  $x_0 \notin H$ , on a  $f(x_0) \neq 0$ .

Posons  $\lambda = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ . Montrons que  $g = \lambda f$ .

Soit  $x \in E$ . Il existe  $(x_H, \alpha) \in H \times \mathbb{K}$  tel que  $x = x_H + \alpha x_0$ .

Puisque  $x_H \in H = \ker(f) = \ker(g)$ , on a  $f(x_H) = g(x_H) = 0$  d'où

$$g(x) = g(x_H) + \alpha g(x_0) = \lambda \alpha f(x_0) = \lambda (f(x_H) + \alpha f(x_0)) = \lambda f(x)$$

ce qui prouve que  $g = \lambda f$ .

2. • Si  $\phi$  est la forme linéaire nulle, il suffit de prendre  $\lambda = 0$  et on a le résultat.

• Supposons désormais que  $\phi$  n'est pas la forme linéaire nulle. Ainsi,  $\ker(\phi)$  est un hyperplan de  $E$  donc  $\dim(\ker(\phi)) = \dim(E) - 1 = n$ .

Par ailleurs, notons  $\psi$  la forme linéaire définie sur  $E$  par  $\psi(P) = P(a)$ .

Alors  $\ker(\psi) = \{(X - a)P, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$  est également un hyperplan de  $E$ , i.e.  $\dim(\ker(\psi)) = \dim(E) - 1 = n$ .

L'hypothèse de l'énoncé implique alors que  $\ker(\psi) \subset \ker(\phi)$  d'où  $\ker(\psi) = \ker(\phi)$  par égalité des dimensions.

D'après la première question, on en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $\phi = \lambda\psi$ , i.e. pour tout  $P \in E$ ,  $\phi(P) = \lambda\psi(P) = \lambda P(a)$  (et nécessairement,  $\lambda = \phi(1)$ ).

Autre méthode (due à Rose) : l'hypothèse de l'énoncé implique directement d'après la formule de Taylor que pour tout  $P \in E$  :

$$\phi(P) = \phi\left(\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k\right) = \phi(1)P(a) + \underbrace{\phi\left((X - a) \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-1}\right)}_{=0} = \phi(1)P(a).$$