

Corrigé de la liste d'exercices n°19

Matrices et applications linéaires

Exercice 1

1. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x + y + z, x + y + z, x + y + z). \end{array}$$

On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

$$\text{donc } \ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

$$\text{Enfin, } \text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}.$$

2. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longrightarrow & (x, 4x, 0). \end{array}$$

$$\text{On a } \ker(f) = \{0\} \text{ donc } f \text{ est injective et } \text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 4, 0)\}.$$

3. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (z, y). \end{array}$$

$$\text{On a } \ker(f) = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\}.$$

$$\text{Enfin, } \text{Im}(f) = \text{Vect}\{(0, 1), (1, 0)\}.$$

4. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 5y, 4x + 20y, 7x + 35y). \end{array}$$

$$\text{On } (x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = -5y \Leftrightarrow (x, y) = (-5y, y) = y(-5, 1) \text{ donc } \ker(f) = \text{Vect}\{(-5, 1)\}.$$

$$\text{Enfin, } \text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 4, 7), (5, 20, 35)\} = \text{Vect}\{(1, 4, 7)\}.$$

5. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 7y, 8x + y, 9x + y). \end{array}$$

On a

$$(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 0 \\ 8x + y = 0 \\ 9x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7y \\ -55y = 0 \\ -62y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{d'où } \ker(f) = \{(0, 0)\} \text{ donc } f \text{ est injective.}$$

$$\text{Enfin, } \text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 8, 9), (7, 1, 1)\}.$$

6. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 2y, 4x + 5y). \end{array}$$

On a $(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ d'où

$\ker(f) = \{(0, 0)\}$ donc f est injective.

Enfin, $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 4), (2, 5)\}$.

Or, les vecteurs $(1, 4)$ et $(2, 5)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On en déduit que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective.

Finalement, l'application linéaire f est bijective : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

7. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (0, x, 0). \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(0, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Enfin, $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(0, 1, 0)\}$. On remarque en particulier que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, ce qui implique que $f^2 = 0$.

8. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & x + 2y + 4z. \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 4z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -2y - 4z\} = \{(-2y - 4z, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-2, 1, 0) + z(-4, 0, 1) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$.

Enfin, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$ car f n'est pas l'application nulle donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 2

• 1ère méthode : Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons $E_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne contenant un 1 en ligne j et des zéros ailleurs.

Par hypothèse, on a $AE_j = 0_{n,1}$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$: Or, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, AE_j est la j -ème colonne de A . Ainsi, toutes les colonnes de A sont nulles, donc A est nulle.

• 2ème méthode : Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A .

Soit $x \in \mathbb{K}^p$. Notons $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Par hypothèse, on a $AX = 0_{n,1}$. Or, AX est la matrice des coordonnées de $f(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $f(x) = 0$, ce qui signifie que f est l'application nulle. Il en découle que $A = 0$.

Exercice 3

$$1. \bullet \text{ Soit } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille $\mathcal{B}_2$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\bullet \text{ Soit } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = A$.

On a alors $f(1, 0, 0) = -(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(1, 1, 1) = (-3, 1, -2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (1, 1, 1) = (2, -1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(1, 1, 1) = (4, -1, 3)$.

Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(-3, 1, -2) + y(2, -1, 1) + z(4, -1, 3) \\ &= (-3x + 2y + 4z, x - y - z, -2x + y + 3z). \end{aligned}$$

- (b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) = A$.

On a alors $g(1, 0, 0) = -1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = (-1, 3, -2)$; $g(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, -2, 1)$ et $g(1, 1, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (1, -4, 3)$.

En particulier, $g(0, 0, 1) = g((1, 1, 1) - (1, 0, 0) - (0, 1, 0)) = g(1, 1, 1) - g(1, 0, 0) - g(0, 1, 0) = (1, -4, 3) - (-1, 3, -2) - (1, -2, 1) = (1, -5, 4)$ donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= g(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xg(1, 0, 0) + yg(0, 1, 0) + zg(0, 0, 1) \\ &= x(-1, 3, -2) + y(1, -2, 1) + z(1, -5, 4) \\ &= (-x + y + z, 3x - 2y - 5z, -2x + y + 4z). \end{aligned}$$

- (c) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}(h) = A$.

On a alors $h(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = (-1, 3, -2)$; $h(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, -2, 1)$ et $h(0, 0, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (1, -4, 3)$ donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xh(1, 0, 0) + yh(0, 1, 0) + zh(0, 0, 1) \\ &= x(-1, 3, -2) + y(1, -2, 1) + z(1, -4, 3) \\ &= (-x + y + z, 3x - 2y - 4z, -2x + y + 3z). \end{aligned}$$

3. (a) La matrice B est de rang 1 donc on a $\text{rg}(f) = 1$ et d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ d'où $\dim(\ker(f)) = 2$.

On sait que l'image de f est engendrée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(1, 0, 0); f(1, 1, 0); f(1, 1, 1)\}$.

Or, $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ et $f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) - f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (1, 1, 1) - (0, 1, 0) = (2, 2, 1)$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(0, 0, 0), (2, 2, 1)\}$.

Enfin, on a $(1, 0, 0) \in \ker(f)$ et $(1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1) \in \ker(f)$ puisque $f(0, 0, 1) = f(1, 1, 1) - f(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$ donc $(0, 0, 1) \in \ker(f)$.

Puisque la famille $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est libre, est contenue dans $\ker(f)$ et que $\dim(\ker(f)) = 2$, on en déduit que c'est une base de $\ker(f)$.

- (b) Les dimensions de l'image et du noyau de g sont les mêmes que dans la question précédente puisqu'elles dépendent du rang de B .

On a comme ci-dessus, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1) - (0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0) + (1, 1, 0) + (1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{(3, 2, 1)\}$.

- (c) De même, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1) - (0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{(2, 2, 1)\}$.

Exercice 4

1. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$.

En appliquant f^{n-1} à cette égalité, et sachant que pour tout $k \geq n$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0_E$.

Or, $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ par hypothèse donc $\lambda_0 = 0$.

En appliquant maintenant f^{n-2} , on obtient $\lambda_1 = 0$ et en répétant le même procédé de proche en proche, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0$ ce qui prouve que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

2. Soit $u \in F$. Il existe des scalaires $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x)$.

Par linéarité de f , on a $f(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+1}(x) \underset{f^n(x)=0}{=} \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k f^{k+1}(x) \in F$, donc F est stable par f .

La matrice de $f|_F$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ de F est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

qui est une matrice de rang $n-1$.

Exercice 5

1. Vérifions que la famille $(f_1, \dots, f_5)$ est libre dans $\mathbb{R}^5$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que $\sum_{i=1}^5 \lambda_i f_i = 0$. Ceci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

La famille est donc libre dans $\mathbb{R}^5$ et est constituée de 5 vecteurs.

On en conclut que la famille $(f_1, \dots, f_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

2. On sait que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F \cap G$. Montrons qu'on a nécessairement $x = 0$.

Puisque $x \in F$, il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

De même, puisque $x \in G$, il existe deux réels λ_3 et λ_4 tels que

$$x = \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4.$$

En soustrayant ces deux relations, on trouve

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 - \lambda_4 f_4 = 0.$$

On peut rajouter "artificiellement" f_5 :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 - \lambda_4 f_4 + 0f_5 = 0.$$

Or, d'après la question précédente, puisque la famille $(f_1, \dots, f_5)$ forme une base de $\mathbb{R}^5$, ceci implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, d'où $x = 0$.

On en déduit que les sous-espaces F et G sont en somme directe.

3. Si f_5 appartenait à $F + G$, la famille $(f_1, \dots, f_5)$ ne serait pas libre, ce qui contredirait la première question. Ainsi, $f_5 \notin F + G$. Notons H la droite engendrée par f_5 . Puisque la famille $(f_1, \dots, f_5)$ forme une base de $\mathbb{R}^5$, tout vecteur de $\mathbb{R}^5$ se décompose de façon unique en une somme d'éléments de F , de G et de H .

On a donc bien $E = F \oplus G \oplus H$.

4. On a

$$\begin{aligned} u(f_1) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2f_2 \in F. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u(f_2) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -2f_1 \in F. \end{aligned}$$

Or, tout élément $x \in F$ s'écrit sous la forme $x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Ainsi, par linéarité de u , on a $u(x) = \lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2) = 2\lambda_1 f_2 - 2\lambda_2 f_1 \in F$, donc F est stable par u .

On a

$$\begin{aligned}
 u(f_3) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= f_4 \in G.
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 u(f_4) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -f_3 \in G.
 \end{aligned}$$

La même preuve que ci-dessus montre donc que G est stable par u .

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
 u(f_5) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= 2f_5 \in H.
 \end{aligned}$$

Ainsi, H est également stable par u .

5. Par définition, la matrice de passage de la base canonique vers la base $(f_1, \dots, f_5)$ est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On soustrait la première ligne à la dernière ligne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On intervertit les deuxième et troisième ligne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On soustrait la troisième ligne à la quatrième ligne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On intervertit les quatrième et cinquième ligne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

On soustrait la quatrième ligne à la deuxième ligne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Enfin, on soustrait la cinquième ligne à la première, à la deuxième, et on l'ajoute à la quatrième :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

L'inverse de P est donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la formule de changement de base, on a la formule $A' = P^{-1}AP$, d'où

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui correspond aux résultats obtenus en question 4.

7. Le fait que F, G et H soient stables par u se lit sur la matrice A' en remarquant qu'elle est triangulaire par blocs (les blocs sont de taille $(2,2)$, $(2,2)$ et $(1,1)$ respectivement).

Exercice 6

- Simple calcul !
- La question précédente montre que la matrice de $f^3 - 2f^2 + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est nulle, ce qui prouve que $f^3 - 2f^2 + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou encore $\frac{1}{2}(f^2 - 2f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
On en déduit que f est bijective, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 - 2f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Exercice 7

1. On a

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \\
 &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -5L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow 5L_3 + L_1} \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -6y - 12z = 0 \\ -12y - 24z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc $\ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1, -2, 1)\}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (A + 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x - 2y + z = 0
 \end{aligned}$$

donc $\ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$.

3. Montrons que la famille $\mathcal{B} = ((1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -2, 1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2 + 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $(1, -2, 1) \in \ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$ donc

$$f(1, -2, 1) = 3(1, -2, 1).$$

De même puisque $(1, 0, -1) \in \ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$ donc $f(1, 0, -1) = -3(1, 0, -1)$, et enfin $f(1, 1, 1) = -3(1, 1, 1)$.

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Montrons que la matrice A est inversible et calculons son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & -7 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3]{L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A^{-1} donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x, y, z) = (\frac{7}{5}x - \frac{2}{5}y, \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}y, \frac{6}{5} - \frac{7}{10}y + \frac{1}{2}z)$.

Exercice 9

- Calculons le rang de la matrice A . On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(A) = 3$, ce qui prouve que la matrice A est inversible. Puisqu'elle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ -2\beta - 2\gamma = 0 \\ -3\gamma = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y - 2z, x, y)$ donc

$$f(u_1) = f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u_1.$$

Ensuite, $f(u_2) = f(1, -1, 1) = (-1, 1, -1) = -u_2$ et $f(u_3) = f(4, 2, 1) = (8, 4, 2) = 2u_3$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (b) Calculons l'inverse de P . On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3, L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 + (-1)^n + 2^{n+3} & 3(1 + (-1)^{n+1}) & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+3} \\ -3 + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 3(1 + (-1)^n) & 6 + 2(-1)^{n+1} - 2^{n+2} \\ -3 + (-1)^n + 2^{n+1} & 3(1 + (-1)^{n+1}) & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 10

1. • Montrons que φ est linéaire.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{n+1}(X))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), \dots, P(a_n)) + \mu(Q(a_0), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

• On a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(X^k) = (a_0^k, \dots, a_n^k)$ donc la matrice de φ dans les bases

canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$.

2. • Montrons que φ est injective. Pour cela, montrons que $\ker(\varphi) = \{0\}$. On a toujours $0 \in \ker(\varphi)$.

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k) = 0$. Puisque les $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts, on en déduit que P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P) \leq n$. A fortiori, P admet plus de racines que son degré, ce qui implique que $P = 0$.

Ainsi, $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.

• Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, l'injectivité de l'application linéaire φ implique sa bijectivité donc φ est un isomorphisme.

Exercice 11

L'hypothèse $AB = 0$ implique que $\text{Im}(B) \subset \ker(A)$ donc en particulier $\text{rg}(B) \leq \dim(\ker(A))$.

Ainsi, $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq \text{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = n$ d'après le théorème du rang.

De plus, si $A + B$ est inversible, alors $\mathbb{K}^n = \text{Im}(A + B) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B) \subset \mathbb{K}^n$ donc

$$\text{Im}(A + B) = \text{Im}(A) + \text{Im}(B) = \mathbb{K}^n.$$

D'après la formule de Grassmann, on a alors

$$n = \text{rg}(A+B) = \dim(\text{Im}(A)+\text{Im}(B)) = \text{rg}(A)+\text{rg}(B)-\dim(\text{Im}(A)\cap\text{Im}(B)) \leq n-\dim(\text{Im}(A)\cap\text{Im}(B)).$$

On a alors nécessairement $\text{Im}(A) \cap \text{Im}(B) = \{0\}$ donc $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) = n$.

Exercice 12

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = 0$, on a clairement $X^T X = 0$

Réciproquement, supposons que $X^T X = 0$. On a alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$. C'est une somme nulle dont tous les termes sont positifs (puisque ce sont des carrés de nombres réels) donc tous les termes sont nuls, i.e. $X = 0_{n,1}$.

2. • Montrons que $\ker(A) = \ker(A^T A)$. On a clairement $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$.

Réciproquement, montrons que $\ker(A^T A) \subset \ker(A)$.

Soit $X \in \ker(A^T A)$, i.e. $A^T A X = 0_{n,1}$. Alors $X^T A^T A X = 0$, i.e. $(AX)^T (AX) = 0$, avec $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après la première question, on en déduit que $AX = 0_{n,1}$, i.e. $X \in \ker(A)$ d'où l'inclusion $\ker(A^T A) \subset \ker(A)$ et finalement l'égalité $\ker(A^T A) = \ker(A)$.

- D'après le théorème du rang, on en déduit que

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker(A)) = n - \dim(\ker(A^T A)) = \text{rg}(A^T A).$$

- La même preuve (en inversant les rôles de A et A^T) montre que $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(AA^T)$.

Or, d'après le cours, on sait que $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$ donc on a bien

$$\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}(AA^T).$$