
DEVOIR MAISON N°12
A RENDRE POUR LE LUNDI 9 MARS 2026

Exercice 1 : Deux endomorphismes sur les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ vu comme sous-espace vectoriel de E . On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X+1)P(X) \end{array} .$$

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. On appelle $\mathcal{C}_E := (1, X, X^2)$ la *base canonique* de E .
Vérifier que $\mathcal{B}_E = \left(1, X+1, \frac{(X+1)^2}{2}\right)$ est également une base de E .
3. À partir de vecteurs de $\mathcal{B}_E$ (respectivement de $\mathcal{C}_E$), constituer une base $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{C}_F$) de F .
4. Écrire dans les bases $\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F$ la matrice A de f et la matrice B de g .
5. Calculer $(f \circ g)(1)$ et $(f \circ g)(X)$. En déduire la matrice C de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{C}_F$.
6. Vérifier à l'aide d'un calcul que l'on a bien $AB = C$.
7. Écrire dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ la matrice A' de f , la matrice B' de g et la matrice C' de $f \circ g$.
8. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}_F$ à la base $\mathcal{B}_F$. En déduire la matrice D de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_F$.
9. Écrire la matrice de passage Q de la base $\mathcal{C}_E$ à la base $\mathcal{B}_E$. Justifier la relation $D = AQ$.
10. Justifier la relation $C = PC'P^{-1}$.

Exercice 2 : Trace d'une matrice

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A , notée $\text{Tr}(A)$, comme la somme de ses coefficients diagonaux, c'est à dire $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Par exemple, la trace de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ vaut $2 - 1 + 4 = 5$.

1. Calculer $\text{Tr}(0_n)$ et $\text{Tr}(I_n)$.
2. (a) Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$.
(b) Montrer que l'application $\text{Tr} : A \mapsto \text{Tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(c) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
(d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.

3. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- (a) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f))$.

Ceci montre que toutes les matrices représentatives de l'endomorphisme f dans une base donnée ont même trace. On appelle cet entier la trace de l'endomorphisme f , et on le note $\text{Tr}(f)$.

- (b) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

4. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\varphi_M : A \mapsto \text{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(b) Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \varphi_M \end{array}$$

est un isomorphisme. En déduire que pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \text{Tr}(AM)$.

- (c) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Tr}$.