20

Analyse asymptotique

Dans tout le chapitre, on considère des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle réel I. On considèrera des limites en $a \in \overline{I}$, ce qui signifie que a est dans I ou est situé aux bornes de l'intervalle I, a étant éventuellement infini.

20.1 Relations de comparaison : cas des fonctions

20.1.1 Domination,négligeabilité, équivalence

Définition 1: Domination

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$.
On dit que la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, si

$$\exists \alpha > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)|).$$

On dit que $f(x)$ est un ≪ grand O ≫de $g(x)$ au voisinage de a.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci signifie que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Exemple 1. • $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.

• Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est bornée au voisinage de 0 donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$.

• Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2} = 2$, la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x^2}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ donc $2x^2+1 \underset{x\to+\infty}{=} O(x^2)$.

• Ce n'est pas une notion symétrique : on peut avoir $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ sans que $g(x) \underset{x\to a}{=} O(f(x))$.

En effet, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est bornée au voisinage de $+\infty$, i.e. $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ donc $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Proposition 1: Propriétés des grands O

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

1. Si $g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$, alors
$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \lambda f(x)+\mu g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x)).$$
En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.
2. $f(x)\times h(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)h(x))$.

Démonstration. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)|)$.

1. Si $g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$, il existe $\beta > 0$ et $N \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in I, (|x-a| \leqslant \beta \Rightarrow |g(x)| \leqslant N|h(x)|).$$
Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Posons $\gamma = \min(\alpha,\beta)$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \gamma$, puisque $|x-a| \leqslant \alpha$ et $|x-a| \leqslant \beta$, on a alors
$$|\lambda f(x)+\mu g(x)| \leqslant |\lambda||f(x)|+|\mu||g(x)| \leqslant |\lambda|M|g(x)|+|\mu|N|h(x)| \leqslant (|\lambda|MN+|\mu|N)|h(x)|,$$
ce qui prouve que $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \lambda f(x)+\mu g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.
2. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a
$$|f(x)h(x)| = |f(x)||h(x)| \leqslant M|g(x)||h(x)| = M|g(x)h(x)|,$$
ce qui prouve que $f(x)\times h(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)h(x))$.

■

Définition 2: Négligeabilité

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$.
On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, si
$$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in I, (|x-a|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|).$$
On dit que $f(x)$ est un « petit o »de $g(x)$ au voisinage de a.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Remarque 1. • Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
La réciproque est fausse : on a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$ mais pas $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.
• On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
• Si f est négligeable devant la fonction nulle en a, alors f est identiquement nulle au voisinage de a.

Exemple 2. • On a $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

• On a $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(\frac{1}{x})$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

• Plus généralement, les croissances comparées se reformulent de la manière suivante : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta > 0$, on a

$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x}), \quad \ln^\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta), \quad \ln^\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{e^{\beta x}}\right).$$

• Si $n < m$ alors $x^n \underset{x\to+\infty}{=} o(x^m)$ et $x^m \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
Concrètement, $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$ et $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Proposition 2: Propriétés des petits o

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

1. Si $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

2. $f(x) \times h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|) \quad (|x-a| \leqslant \beta \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon|h(x)|).$$

Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $\gamma = \min(\alpha,\beta)$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \gamma$, puisque $|x-a| \leqslant \alpha$ et $|x-a| \leqslant \beta$, on a alors

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \leqslant |\lambda|\varepsilon|g(x)| + |\mu|\varepsilon|h(x)| \leqslant (|\lambda|\varepsilon^2 + |\mu|\varepsilon)|h(x)|,$$

ce qui prouve que $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|)$.
Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a alors

$$|f(x)h(x)| = |f(x)||h(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)||h(x)| = \varepsilon|g(x)h(x)|,$$

ce qui prouve que $f(x) \times h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.

■

Définition 3: Equivalence

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ .Soit $a \in \overline{I}$
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si

$$f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Remarque 2. • La relation $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ s'écrit également $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

• Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et que g ne s'annule pas au voisinage de a, alors on a également f qui ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

En particulier, si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

Exemple 3. • $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1$.

• $x^2 + 3x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^5 - 4x^2 + x - 1$.

• $\ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Proposition 3: Propriétés de l'équivalence

Soient $f, g, h, u : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.

1. (Réflexivité) On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
2. (Symétrie) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
3. (Transitivité) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
4. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.
5. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, alors
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}.$$
6. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)u(x)$. De plus, si h et u ne s'annulent pas au voisinage de a, on a $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{u(x)}$.
7. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}, f(x)^p \underset{x\to a}{\sim} g(x)^p$ (et le résultat s'étend à $p \in \mathbb{Z}$ si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a).
Si, de plus, les fonctions f et g sont stictement positives au voisinage de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.
8. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.
9. Si pour tout $x \in I, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Démonstration.

1. On a clairement $f(x) - f(x) = 0 \underset{x\to a}{=} o(f(x))$ donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

2. Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, i.e. $f(x)-g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, alors il existe $\delta \in]0,1[$ tel que $\varepsilon = \dfrac{\delta}{1-\delta}$.

   Puisque $f(x)-g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$,par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-g(x)| \leqslant \delta|g(x)|)$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a alors

   $$|f(x)-g(x)| \leqslant \delta|g(x)| = \delta|g(x)-f(x)+f(x)| \leqslant \delta(|g(x)-f(x)|+|f(x)|) = \delta|g(x)-f(x)|+\delta|f(x)|$$

   d'où $(1-\delta)|f(x)-g(x)| \leqslant \delta|f(x)|$. Puisque $\delta \in]0,1[$, il vient

   $$\forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-g(x)| \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}|f(x)| = \varepsilon|f(x)|,$$

   ce qui prouve que $g(x)-f(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$, i.e. $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$ et $|g(x)-h(x)| \leqslant \varepsilon|h(x)|$.

   On a alors pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$:

   $$|f(x)-h(x)| \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \leqslant \varepsilon(|g(x)|+|h(x)|) \leqslant \varepsilon(|g(x)-h(x)|+2|h(x)|) \leqslant (\varepsilon^2+2\varepsilon)|h(x)|,$$

   ce qui prouve que $f(x)-h(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, i.e. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a alors

   $$|\lambda f(x) - \lambda g(x)| = |\lambda||f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon|\lambda g(x)|,$$

   ce qui prouve que $\lambda f(x) - \lambda g(x) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$, i.e. $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.

5. Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, ce qui prouve que $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$.

6. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$ et $|h(x)-u(x)| \leqslant \varepsilon|u(x)|$.

   Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a alors

   $$\begin{array}{rcl} |f(x)h(x)-g(x)u(x)| & \leqslant & |f(x)-g(x)||h(x)| + |g(x)||h(x)-u(x)| \\ & \leqslant & \varepsilon|g(x)|(|h(x)|+|u(x)|) \\ & \leqslant & \varepsilon|g(x)|(|h(x)-u(x)|+2|u(x)|) \\ & \leqslant & (\varepsilon^2+2\varepsilon)|g(x)u(x)|, \end{array}$$

   ce qui prouve que $f(x)h(x)-g(x)u(x) \underset{x\to a}{=} g(x)u(x)$, i.e. $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)u(x)$.

   Si h et u ne s'annulent pas au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{u(x)}$ donc la preuve ci-dessus permet de conclure que $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{u(x)}$.

7. Par récurrence immédiate, le résultat précédent permet de montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(x)^p \underset{x\to a}{\sim} g(x)^p$ (et le résultat s'étend aux puissances négatives si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a).
De plus, si f et g sont strictement positives au voisinage de a, alors on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = 1,$$
ce qui prouve que $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.
8. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$ et on a alors
$$||f(x)| - |g(x)|| \leqslant |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|,$$
ce qui prouve que $|f(x)| - |g(x)| \underset{x\to a}{=} o(|g(x)|)$, i.e. $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.
9. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - h(x)| = h(x) - f(x) \leqslant \varepsilon|f(x)|$.
On a alors pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$:
$$|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x) \leqslant h(x) - f(x) \leqslant \varepsilon|f(x)|,$$
ce qui prouve que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

■

Remarque 3. En revanche, on ne peut pas additionner des équivalents.

En effet, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ mais on n'a pas $x+1+(-x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x+(-x)$, sinon on aurait $1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 0$, ce qui est clairement faux !

Proposition 4

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Soient f et g des fonctions équivalentes au voisinage de a.
Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Démonstration. • Si $l \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\}$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a et on a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 1} \times \underbrace{g(x)}_{\to l} = l$.

• Supposons que $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon)$.

Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in I, (|x-a| \leqslant \beta \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|)$.

Posons $\delta = \min(\alpha, \beta)$. On a alors pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$:
$$|f(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)| + \varepsilon \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon,$$
ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Dans tous les cas, on a bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. ■

Remarque 4. En revanche, la réciproque est fausse.

On a $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x^2}{x} = 0 \neq 1$ donc les fontions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas équivalentes au voisinage de 0.

Proposition 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$.
Soit $l \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$.

Démonstration. En effet, on a bien dans ce cas $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{l} = 1$. ∎

Exemple 4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Remarque 5. En revanche, si $l = 0$ et si f n'est pas nulle au voisinage de a, on ne peut pas écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$. En effet, si f était équivalente à la fonction nulle au voisinage de a, alors on aurait $f(x) - 0 = f(x) \underset{x\to 0}{=} o(0)$, i.e. f serait nulle au voisinage de a.

Proposition 6: Composition à droite des équivalents

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$
Soit $a \in \overline{I}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
Soit $u : J \longrightarrow I$ une fonction définie sur un intervalle J réel.
Soit $b \in \overline{J}$ tel que $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$.
Alors $f \circ u(x) \underset{x\to b}{\sim} g \circ u(x)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

De plus, puisque $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in J$, si $|x - b| \leqslant \delta$, alors $|u(x) - a| \leqslant \alpha$.

Ainsi, pour tout $x \in J$ tel que $|x - b| \leqslant \delta$, on a (puisque $|u(x) - a| \leqslant \alpha$) :

$$|f(u(x)) - g(u(x))| \leqslant \varepsilon |g(u(x))|,$$

ce qui prouve que $f \circ u(x) - g \circ u(x) \underset{x\to b}{=} o(g \circ u(x))$, i.e. $f \circ u(x) \underset{x\to b}{\sim} g \circ u(x)$. ∎

Exemple 5. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par composition, on trouve que $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Par produit, on obtient que $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x}) = 1$.

Finalement, par composition de limites, on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. De même, on a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

   Par produit, $\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Remarque 6. En revanche, on ne peut pas composer des équivalents par la gauche. En effet, on a $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$ mais $e^x \not\sim e^{x+1}$.

20.1.2 Développements limités en 0

Définition 4: Développements limités en 0

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I tel que $0 \in \overline{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n).$$

On note alors le développement limité de f à l'ordre n en 0 sous la forme

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Remarque 7. • Une définition équivalente est la suivante : on dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

• Si f admet en 0 un développement limité d'ordre n, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un développement limité d'ordre p en 0 obtenu par troncature.

En effet, si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k}{x^p} = \frac{\sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)}{x^p} = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n-p} a_{k+p} x^k + x^{n-p}\varepsilon(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k = o(x^p)$ d'où $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$.

Exemple 6. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $1 - x^{n+1} = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ donc pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$ donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
Ainsi, la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 et on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.
En remplaçant x par $-x$, on trouve le développement limité

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Proposition 7: Unicité du développement limité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in \overline{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet deux développements limités d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

et

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe deux fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = 0$ telles que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \eta(x),$$

d'où pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k + x^n (\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0.$$

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$.
Soit $r = \min\{k \in [\![0, n]\!], a_k \neq b_k\}$, i.e. $a_r \neq b_r$ et pour tout $k \in [\![0, r-1]\!], a_k = b_k$. Alors pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=r}^{n} (a_k - b_k) x^k + x^n (\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0,$$

d'où en divisant par x^r, on a pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$a_r - b_r + x \sum_{k=r+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-1-r} + x^{n-r} (\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0$$

Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) - \eta(x) = 0$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} x \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-1-r} = 0$ donc en faisant tendre x vers 0, on trouve $a_r - b_r = 0$, i.e $a_r = b_r$, ce qui est absurde.
Nécessairement, pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$, d'où l'unicité du développement limité. ■

Remarque 8. Ceci entraîne également que pour tout $x \in I \setminus \{0\}, \varepsilon(x) = \eta(x)$, mais on ne les écrit pas en pratique.

Corollaire 1: Parité du développement limité en 0

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I centré en 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

1. Si la fonction f est paire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ avec k impair, $a_k = 0$.
2. Si la fonction f est impaire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ avec k pair, $a_k = 0$.

Démonstration.

1. Si f est paire, alors pour tout $x \in I, f(x) = f(-x)$, i.e. pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$ donc si k est impair, $a_k = -a_k$, d'où $a_k = 0$ si k est impair.

2. Si f est impaire, alors pour tout $x \in I, f(x) = -f(-x)$, i.e. pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_k x^k + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^{k+1} a_k$ donc si k est pair, $a_k = -a_k$, d'où $a_k = 0$ si k est pair.

■

20.1.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 8: Somme de développements limités

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \in \overline{I}$. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$.
On suppose que f et g admettent en 0 des développements limités d'ordre n et p respectivement de la forme

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p).$$

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet en 0 un développement limité d'ordre n de la forme

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Il existe des fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + x^p \eta(x).$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x \in I$, on a

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + x^n \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k x^{n-k} + x^n(\lambda \varepsilon(x) + \mu x^{p-n} \eta(x)).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k}{x^n} = \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k x^{n-k} + \lambda \varepsilon(x) + \mu x^{p-n} \eta(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $(\lambda f + \mu g)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$, ce qui est le résultat souhaité. ■

Exemple 7. $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) + 1 - x + x^2 + o(x^2) = 2 + 2x^2 + o(x^2)$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ étant paire, son développement limité n'a que des monômes de degrés pairs.

Proposition 9: Produit de développements limités

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \in \overline{I}$.
Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$.
On suppose que f et g admettent en 0 des développements limités d'ordre n et p respectivement de la forme

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p).$$

La fonction fg admet en 0 un développement limité d'ordre n de la forme

$$(fg)(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j \right) x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Il existe des fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \eta(x).$$

Par propriété du produit de polynômes, on trouve que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) + x^n \left(\eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon(x)\eta(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^k + x^n \left(\eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon(x)\eta(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^k + x^n\delta(x)
\end{aligned}$$

où $\delta(x) = \left(x\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^{k-n-1} + \eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n\varepsilon(x)\eta(x)\right)$.

Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\frac{(fg)(x) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j\right) x^k}{x^n} = \delta(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(fg)(x) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j\right) x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, ce qui est le résultat souhaité. ∎

Exemple 8. Déterminons le développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1+x^2}{1+x} &= (1+x^2)(1-x+x^2-x^3+o(x^3)) \\
&= 1-x+x^2-x^3+o(x^3)+x^2-x^3+o(x^3) \\
&= 1-x+2x^2-2x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

Remarque 9. On peut également composer des développements limités, comme on le verra sur des exemples ultérieurs.

Par exemple, $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^2)^k + o((x^2)^n) = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$.

20.1.4 Développements limités en un point et en l'infini

Définition 5: Développement limité en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$ un réel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Il est équivalent de dire que la fonction $g : h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0.

En effet,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

En posant $x = a + h$, i.e. $h = x - a$ ceci équivaut à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k h^k}{h^n} = 0,$$

d'où $g(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$.

Remarque 10. En pratique, on ramène toujours un développement limité en un point $a \in \mathbb{R}$ à un développement limité en 0 via le changement de variable $h = x - a$.

Proposition 10: Développement limité d'une fonction continue ou dérivable

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

1. La fonction f est continue en a si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 0 et dans ce cas,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1).$$

2. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 1 et dans ce cas,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Démonstration.

1. On a les équivalences :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} o(1),$$

ce qui équivaut à $f(x) = f(a) + o(1)$.

2. La preuve a déjà été faite dans le chapitre « Dérivabilité ».
   En effet, on a montré que f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in I$,
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
   Or, $(x-a)\varepsilon(x) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$, d'où le résultat voulu.

■

Remarque 11. En revanche, il se peut qu'une fonction admette un développement limité d'ordre 2 en un point sans y être deux fois dérivable.

Par exemple, soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

Tout d'abord, comme la fonction sinus est bornée, on a bien $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui prouve que la fonction f est continue en 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
donc $f'(0) = 0$.

En revanche, pour tout $x \neq 0$ $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et ceci n'a pas de limite en 0 puisque cosinus n'a pas de limite en l'infini.

Ainsi, la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Or, elle y admet bien un développement limité d'ordre 2 puisque
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, ce qui est le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.

Définition 6: Développement limité en l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ s'il existe deux entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et des réels $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_p}{x_p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Remarque 12. • On définit de même un développement limité en $-\infty$.

• En pratique, un développement limité en $\pm\infty$ sert à déterminer des asymptotes et la position relative de la courbe de la fonction étudiée par rapport à cette asymptote.

Exemple 9. Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Déterminons un développement limité de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

On se ramène à un développement limité en 0 : on a pour tout $x \notin \{0,1\}$,

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Posons $h = \dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, h tend vers 0 et on a le développement limité d'ordre 2 en 0 : $\dfrac{1}{1-h} \underset{x\to 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)$ donc en $+\infty$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Or, en $+\infty$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(x+1) = 0$ donc la courbe de la fonction g admet pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = x+1$.

De plus, $g(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{2}{x} > 0$ donc au voisinage de $+\infty$, $g(x)-(x+1) > 0$, ce qui prouve que la courbe de la fonction g est située au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

On montre de même que $g(x) \underset{-\infty}{=} x+1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, d'où $g(x)-(x+1) \underset{-\infty}{=} \dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi, la courbe de la fonction g admet pour asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation $y = x+1$. Cette fois, au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{2}{x} < 0$ donc la courbe de la fonction g est située en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

20.1.5 Primitivation d'un développement limité

Proposition 11: Primitivation d'un développement limité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, avec $0 \in I$.
On suppose que la fonction f' est continue sur I et admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de la forme

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de la forme

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$ telle que pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \eta(t).$$

Soit $x \in I$. En intégrant entre 0 et x, on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x a_k t^k dt + \int_0^x t^n \eta(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + \int_0^x t^n \eta(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \eta(t)dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$, $|\eta(x)| \leqslant (n+1)\varepsilon$.

Soit $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$.

• Si $x \geqslant 0$, on a

$$\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |t^n \eta(t)|dt \leqslant (n+1)\varepsilon \int_0^x t^n dt = (n+1)\varepsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \varepsilon x^{n+1} = \varepsilon |x^{n+1}|.$$

• Si $x \leqslant 0$, on a

$$\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \int_x^0 |t^n \eta(t)|dt \leqslant (-1)^n (n+1)\varepsilon \int_x^0 t^n dt = (-1)^n (n+1)\varepsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = (-1)^{n+1}\varepsilon x^{n+1} = \varepsilon |x^{n+1}|.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$, $\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \varepsilon |x^{n+1}|$ donc $\left|\dfrac{\int_0^x t^n \eta(t)dt}{x^{n+1}}\right| \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{\int_0^x t^n \eta(t)dt}{x^{n+1}}\right| = 0$, i.e. $\int_0^x t^n \eta(t)dt \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$.

On a donc bien pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \eta(t)dt \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

■

Remarque 13. Le résultat est bien évidemment valable en tout point $a \in I$, c'est à dire que si f' est continue sur I et admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n),$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en a de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \frac{(x-a)^k}{k} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 10. Soit f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ de dérivée $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, avec f' continue sur $]-1,+\infty[$.

On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$$

donc en primitivant, on trouve un développement limité de f d'ordre $n+1$ en 0 de la forme

$$f(x)=\ln(1+x)=f(0)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1}).$$

En remplaçant x par $-x$, on trouve un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de $x\longmapsto \ln(1-x)$ de la forme

$$\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{(-x)^k}{k}+o(x^{n+1})=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1})=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}).$$

Remarque 14. En revanche, on ne peut pas dériver un développement limité.

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$.

On a vu dans le chapitre « Dérivabilité »que la fonction f est dérivable en 0 mais la fonction f' n'est pas continue en 0.

Ainsi, la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 (qui est $f(x)=o(x)$) mais f' n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.

20.2 Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

20.2.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 1: Formule de Taylor-Young

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a\in I$.
Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n) \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons la propriété par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

•**Initialisation :** Pour $n=0$, i.e. f est continue sur I, alors $f(x)\underset{x\to a}{=}f(a)+o(1)$, ce qui prouve la propriété au rang $n=0$.

•**Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors $f'\in\mathcal{C}^n(I)$ donc f' admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f'^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

Puisque f' est continue sur I, on peut primitiver le développement limité de f' pour obtenir un développement limité de f en a à l'ordre $n+1$ de la forme :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

■

Remarque 15. • Ceci signifie que la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

• Toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet donc en tout point un développement limité d'ordre n.

En particulier, si $0 \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Exemple 11. Si on note $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ d'où $f^{(k)}(0) = k!$. D'après la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-x} = f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

On retrouve le développement limité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ obtenu auparavant.

20.2.2 Développements limités usuels au voisinage de 0

Proposition 12: Développements limités usuels au voisinage de 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. $$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

3. $$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

4. $$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

5. $$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

6. $$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

7. $$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

8. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

9. $$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

10. $$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Puisque exp est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$
Or, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n, \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ donc
$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$
2. Puisque cos est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n}).$$
On a pour tout $k \in \mathbb{N}, \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1}\sin(0) = 0$ donc
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$
3. Puisque sin est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n+1}).$$
On a pour tout $k \in \mathbb{N}, \sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ et $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ donc
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$
4. La fonction ch est la partie paire de la fonction exponentielle, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. En prenant la partie paire du développement limité de la fonction exponentielle, on obtient le résultat voulu.
5. La fonction sh est la partie impaire de la fonction exponentielle, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. En prenant la partie impaire du développement limité de la fonction exponentielle, on obtient le résultat voulu.
6. Preuve déjà faite.
7. Preuve déjà faite.
8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$.
On montre facilement par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ donc on obtient d'après la formule de Taylor-Young :
$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n),$$
ce qui est le résultat voulu.

9. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Or, en utilisant le développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, on obtient
   $$\frac{1}{1+x^2} \underset{x=0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$
   En primitivant ce développement limité, on obtient le développement limité en 0 de arctan.

10. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

    On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

    Par ailleurs, $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$.

    Posons $X = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Quand x tend vers $0, X$ tend vers 0 et on a donc
    $$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-X} = 1 + X + o(X) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
    Ainsi, on trouve
    $$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

■

Remarque 16. • Puisque cos est paire et sin est impaire, on remarque que leurs développements limités ne comportent que des puissances paires et impaires respectivement.

• En remplaçant x par $-x$, on retrouve les développements limités
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$
et
$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Exemple 12. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

20.3 Applications

20.3.1 Calcul d'équivalents et de limites

Proposition 13

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de la forme
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$
avec $p \leqslant n$ et $a_p \neq 0$.
Alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$.

Démonstration. En effet, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_p \neq 0$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$ car $\dfrac{f(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \dfrac{a_k}{a_p} x^{k-p} + \dfrac{1}{a_p} x^{n-p}\varepsilon(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$. ■

Remarque 17. Le résultat se généralise en tout point a : si

$$f(x) = a_p(x-a)^p + \dots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Exemple 13. Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)}$.

On a $e^x - \sqrt{1+x} = 1 + x + o(x) - 1 - \dfrac{x}{2} + o(x) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ donc $e^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

Par ailleurs, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par quotient :

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, ceci signifie que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

En établissant un développement limité d'ordre 1 de f en 0, on peut montrer que ce prolongement par continuité de f est également dérivable en 0.

On a $e^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5x^2}{8} + o(x^2)$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}.$$

En posant $X = \dfrac{x}{2} + o(x)$ et en utilisant le développement limité $\dfrac{1}{1-X} \underset{x\to 0}{=} 1 + X + o(X)$, on obtient

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

donc finalement

$$\begin{aligned} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{8} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7x}{8} + o(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{7}{8}$.

20.3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 14: Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité en un point a de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a))^2$$

avec $f''(a) \neq 0$.
Soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$.
Alors la courbe de f est située au-dessus de cette tangente au voisinage de a si et seulement si $f''(a) > 0$.

Démonstration. On a $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) = \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

Ainsi, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$.

Puisque $(x-a)^2 \geqslant 0$, le signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ au voisinage de a est celui de $f''(a)$, d'où le résultat. ■

Exemple 14. • Au voisinage de 0, on a $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Soit $y = 1 + x$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle.

Puisque $e^x - (1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $\dfrac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

• Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Soit $y = x$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Puisque $\ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $-\dfrac{x^2}{2}$ est négatif au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de la fonction f est située en-dessous de sa tangente au voisinage e 0.

20.3.3 Extrema locaux

Proposition 15: Développement limité d'ordre 2 en un extremum local

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ un point intérieur à I (i.e. a n'est pas une extrêmité de I).
On suppose que f admet un extremul local en a.
Supposons que f admette un développement limité d'ordre 2 en a de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

1. Si $a_2 > 0$ (resp. $a_2 < 0$), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en a.
2. Si f admet un minimum (resp. maximum) local en a, alors $a_2 \geqslant 0$ (resp. $a_2 \leqslant 0$).

Remarque 18. Tout d'abord, puisque f admet un développement limité d'ordre 2 en a, alors f y admet un développement limité d'ordre 1 par troncature. Ainsi, f est dérivable en a donc $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$. De plus, puisque a est un point intérieur de I en lequel f admet un extremum, on en déduit que $f'(a) = 0$ d'où $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(x-a)$.

Ainsi, le développement limité d'ordre 2 de f en a est bien de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$, Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors $a_2 = \dfrac{f''(a)}{2}$ d'après la formule de Taylor-Young.

On en déduit que si $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en a et si f admet un minimum (resp. maximum) local en a, alors $f''(a) \geqslant 0$ (resp. $f''(a) \leqslant 0$).

Démonstration.

1. Supposons que $a_2 > 0$.
   On a $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ donc $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_2(x-a)^2$.
   Puisque $x \mapsto a_2(x-a)^2$ est strictement positive au voisinage de a, il en est de même de $x \mapsto f(x) - f(a)$, ce qui signifie que f admet un minimum local en a.
   La preuve est analogue dans le cas où $a_2 < 0$.
2. Le deuxième point s'obtient à partir du premier par contraposée.

■

Exemple 15. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Puisque $\cos'(0) = 0$ et $\cos''(0) = -1 < 0$, on en déduit que cos admet un maximum local en 0.

Remarque 19. Il se peut que f admette un minimum local en a et que $f''(a) = 0$.

Soit $f : x \mapsto \cos(x) + \dfrac{x^2}{2}$. Notons que la fonction f est paire. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = x - \sin(x)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x - \sin(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, f admet un minimum global en 0.

Or, $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on voit sur le développement limité de f que $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$. En fait, on a $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{4!}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{4!}$ est strictement positive au voisinage de 0, ce qui permet de retrouver que $x \mapsto \cos(x) + \dfrac{x^2}{2}$ admet un minimum (local) en 0.

20.4 Relations de comparaison : cas des suites

20.4.1 Croissances comparées

Pour $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n! = \lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Toutefois, ces trois suites ne tendent pas vers $+\infty$ « à la même vitesse ». L'objet du théorème suivant est de comparer les croissances de ces suites.

Théorème 2: Théorème de croissances comparées

Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Démonstration. • Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$. Soit $N = \lfloor a \rfloor + 1$.

Pour tout $n > N$ on a

$$\frac{n!}{a^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{a} = \prod_{k=1}^{N} \frac{k}{a} \prod_{k=N+1}^{n} \frac{k}{a} > \frac{N!}{a^N} \left(\frac{N}{a}\right)^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque $\dfrac{N}{a} > 1$, donc par comparaison, on obtient bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

• Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.
On a

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = e^{n\ln(a)-\alpha\ln(n)} = e^{n(\ln(a)-\alpha\frac{\ln(n)}{n})}.$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc puisque $\ln(a) > 0$, on obtient par composition des limites que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n(\ln(a)-\alpha\frac{\ln(n)}{n})} = +\infty$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$. ■

Remarque 20. • Il faut retenir que la factorielle domine les suites géométriques, qui elles-mêmes dominent les suites puissances.

• Ceci implique en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^\alpha} = +\infty$.

Exemple 16. • $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{37}}{3^n} = 0$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sqrt{n} = 0$.

20.4.2 Relations de comparaison

Définition 7: Domination

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, i.e. on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$.
On note $u_n = O(v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{|u_n|}{|v_n|}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.

Définition 8: Négligeabilité

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On note $u_n = o(v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Définition 9: Suites équivalentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 21. Dans ce cas, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

Exemple 17. • On a $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $n \sim n+1$.

• On a $\dfrac{\sqrt{n^2-3n+4}}{n} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\sqrt{n^2-3n+4} \sim n.$$

Les relations de comparaison pour les suites vérifient exactement les mêmes propriétés que celles pour les fonctions. De plus, on retrouve les mêmes équivalents de référence.

Proposition 16: Equivalents de référence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors

1. $\sin(u_n) \sim u_n$;
2. $\tan(u_n) \sim u_n$;
3. $1-\cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$;
4. $\ln(1+u_n) \sim u_n$;
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; ,
6. $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$;
7. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.
8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$;
9. $\tan(u_n) \sim u_n$;
10. $\arctan(u_n) \sim u_n$.

Remarque 22. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les développements limités obtenus précédemment pour les fonctions. ■

Exemple 18. On a

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, signalons la formule de Stirling, qui est un équivalent célèbre, mais que nous ne démontrerons ni n'utiliserons pas :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$