Liste d'exercices n°20 — Analyse asymptotique

Exercice 1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto e^x + \cos(x)$
2. $x \longmapsto \ln(1+x) + \sin(x)$
3. $x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$
4. $x \longmapsto \arctan(x)$
5. $x \longmapsto \ln(\cos(x))$
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
7. $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{3+x^2}$
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}$
9. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$
10. $x \longmapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2$
11. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1-x}$
12. $x \longmapsto \ln(1+x)\dfrac{\sin(x)}{x}$
13. $x \longmapsto \exp(\sin(x))$

Exercice 2.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de exp en 5.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \longmapsto \cos(\ln(x))$ en 1.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de sin en $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^4$, qui admettent au voisinage de 0 les développements limités à l'ordre 4 suivants :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4).$$

1. Calculer $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :
   (a) fg ;
   (b) $\dfrac{1}{f}$;
   (c) $\dfrac{g}{f}$;
   (d) $f \circ g$;
   (e) $\ln \circ f$;
   (f) la primitive de f qui s'annule en 0.
3. Peut-on déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g \circ f$?
4. La fonction $\dfrac{1}{g}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

5. (a) Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{g(x)}$.
   (b) Aurait-on pu obtenir un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction précédente ?
6. (a) Peut-on donner un développement limité de f' à l'ordre 4 en 0 ?
   (b) Donner un développement limité de f' en 0 au plus grand ordre possible.
7. On suppose dans cette question que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner un développement limité de sa réciproque en $f(0)$ à l'ordre 1.

Exercice 5. Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{\sin^4(x)} \left[\sin\left(\dfrac{x}{1+x}\right) - \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right]$.

Exercice 6. Tracer, au voisinage de 1, la courbe d'équation

$$y = \frac{\ln(1+x) - \ln(2)}{x^2 \ln(x)}.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto 3\frac{e^x + e^{-x}}{2} - e^{x^2}.$$

1. Effectuer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum local en 0.
3. La fonction f admet-elle un minimum global en 0 ?

Exercice 8. On considère l'équation différentielle

$$(E) : |x|y'(x) + (x-2)y(x) = x^3.$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. A l'aide d'un équivalent, déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)(\sqrt{n^2-1} - n)$;
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n}) - 1}}{\tan(\frac{(-1)^n}{n^2})}$;
4. $u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 10.
Donner un équivalent, ainsi que la nature, des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(n^3 - 1 + n^2)\ln(1+n^4)}{n^2+1}$;
4. $\forall n \geqslant 1, u_n = \sqrt{n^2+n-1} - n$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n!}\right)\right)$;
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

Exercice 11.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que
$$\tan(x_n) = x_n.$$
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.
En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.
En déduire que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
5. Conclure que $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 12. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation
$$(E_n) : e^x + x = n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Montrer que $u_n = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.