4 Nombres réels

4.1 Introduction des nombres réels

4.1.1 Des entiers naturels aux nombres rationnels

La définition de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est fondée sur les axiomes de Peano que nous ne présenterons pas ici. Il suffit de savoir que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant 0 et le successeur de chacun de ses éléments, i.e. si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1 \in \mathbb{N}$. Finalement,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

C'est un ensemble infini dont le plus petit élément est 0.

Il est également stable par l'addition, c'est à dire que si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $a + b \in \mathbb{N}$.

L'addition possède plusieurs propriétés :

- L'addition est une loi commutative, i.e. pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2, a + b = b + a$.
- L'addition est une loi associative, i.e. pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, alors

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

On s'autorise donc à noter ce nombre $a + b + c$.

- 0 est l'élément neutre pour l'addition, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, n + 0 = 0 + n = n$.

En revanche, si $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, il n'existe pas d'entier naturel dont la somme avec n est égale à 0. Rapidement, le besoin de recourir aux entiers négatifs se fait sentir et on introduit l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}, -n$ est appelé l'opposé de n et vérifie $n + (-n) = -n + n = 0$, ce que l'on notera plus simplement

$$n - n = 0.$$

On étend la loi d'addition de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$; celle-ci conserve naturellement les mêmes propriétés, auxquelles s'ajoute une nouvelle : tout élément possède un opposé pour la loi $+$.

En plus de l'addition, on munit maintenant $\mathbb{Z}$ d'une deuxième loi, la multiplication, qui laisse $\mathbb{Z}$ stable et est elle aussi commutative, associative et qui a pour élément neutre 1.

$\mathbb{Z}$ est maintenant confronté au problème de l'inverse, le pendant du problème de l'opposé auquel était confronté $\mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il n'existe pas forcément d'entier dont le produit avec n fasse 1. Pour trouver cet inverse, on doit introduire un nouvel ensemble, l'ensemble des nombres rationnels défini comme suit :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{cc} 1)\dfrac{p}{q}=\dfrac{p'}{q'} \Longleftrightarrow pq'=p'q; & 2)\dfrac{p}{q}+\dfrac{p'}{q}=\dfrac{p+p'}{q}; \\ 3)\dfrac{p}{q}+\dfrac{p'}{q'}=\dfrac{pq'+p'q}{qq'}; & 4)\dfrac{p}{q}\dfrac{p'}{q'}=\dfrac{pp'}{qq'}; \\ 5)\dfrac{1}{\frac{p}{q}}=\dfrac{q}{p}; & 6)\forall n\in\mathbb{Z}, n\dfrac{p}{q}=\dfrac{np}{q}. \end{array}.$$

On a désormais bien $n\times\dfrac{1}{n}=1$. Mais très vite, les mathématiciens vont s'apercevoir une fois de plus que ces nombres ne suffisent plus.

4.1.2 De la nécessité d'un ensemble plus large

Au Vème siècle avant J.-C., les Grecs découvrent que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est un nombre irrationnel : c'est

$$\sqrt{2}\simeq 1,414...$$

Proposition 1: Irrationalité de $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Supposons par l'aburde que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. Quitte à simplifier p et q par leur plus grand diviseur commun, on peut supposer p et q premiers entre eux.

En élevant au carré, on a $2=\dfrac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2=2q^2$. Ainsi, p^2 est pair, ce qui implique que p est pair. Il existe donc un entier naturel k tel que $p=2k$.

Ainsi, $2q^2=p^2=4k^2$, d'où $q^2=2k^2$, ce qui implique que q^2 est pair, donc q aussi.

Finalement, p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.

$\sqrt{2}$ ne peut donc pas être rationnel. ■

Dés lors, cette découverte ouvre la perspective de l'existence d'autres nombres. Et pour cause, il y a dans la nature bien plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels... Citons par exemple $e\simeq 2,718281828...$ et $\pi\simeq 3,141592...$

4.2 Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$

On ne construira pas rigoureusement l'ensemble des nombres réels, ce serait bien trop compliqué et trop long ! Intuitivement, on peut penser que les nombres réels sont les limites de suites de nombres rationnels.

On a donc les inclusions

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

4.2.1 Intervalles

Définition 1: Intervalles

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On définit les intervalles suivants :

$$\begin{array}{rr} [a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, & [a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, &]a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\ ]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}, &]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}, \\ ]b,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > b\}, & [b,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq b\}. \end{array}$$

Remarque 1. • Une définition équivalente est la suivante :

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset I$.

• On a $]-\infty,0] = \mathbb{R}_-$, $]-\infty,0[= \mathbb{R}_-^*$, $[0,+\infty[= \mathbb{R}_+$, $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et enfin $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

• L'ensemble vide est un intervalle.

• L'intersection de deux intervalles est un intervalle ; en revanche l'union d'intervalles non vides d'intersection vide peut ne pas être un intervalle.

Exemple 1. • $[0,\sqrt{2}[\cap [1,\pi] = [1,\sqrt{2}[$.

• $[0,1] \cup [3,4]$ n'est pas un intervalle car cet ensemble contient 1 et 3 mais pas 2 qui est pourtant situé dans l'intervalle $[1,3]$.

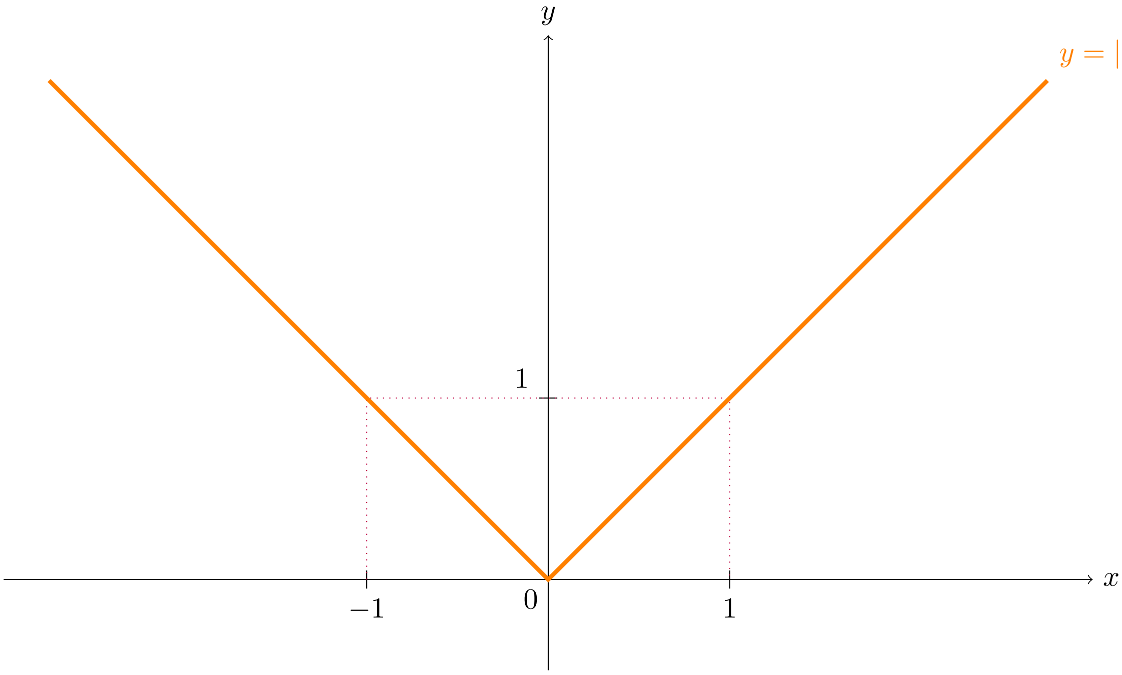
4.2.2 Valeur absolue

Définition 2: Valeur absolue

Soit x un nombre réel. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 2. $|-3| = 3$.



Remarque 2. • La valeur absolue est donc une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• Il découle de la définition que pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$ et $-|x| \leq x \leq |x|$.

• Soit $y \geq 0$. On a $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$.

Supposons que $|x| \leq y$. Si $x \geq 0$, ceci implique que $x \leq y$ donc $-y \leq 0 \leq x \leq y$. Si $x \leq 0$, ceci implique que $-x \leq y$ d'où $y \geq 0 \geq x \geq -y$ et donc dans tous les cas $-y \leq x \leq y$.

Réciproquement, supposons que $-y \leq x \leq y$. Si $0 \leq x \leq y$, la valeur absolue étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|x| \leq |y| = y$.

Si $-y \leq x \leq 0$, la valeur absolue étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a $|x| \leq |-y| = y$.

Dans tous les cas, on a bien $|x| \leq y$, d'où l'équivalence.

• La négation de l'assertion précédente nous donne $|x| > y \Leftrightarrow x < -y$ ou $x > y$.

• On a de même $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x \leq -y$ ou $x \geq y$.

Proposition 2: Propriétés de la valeur absolue

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. (Positivité) Pour tout réel $x, |x| \geq 0$.
2. (Séparation) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. (Homogénéité) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$.
4. (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Démonstration.

1. • Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$.
   • Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x \geq 0$.
2. L'implication $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$ est vraie par définition de la valeur absolue.
   Supposons que $|x| = 0$. Si $x \geq 0$, alors $0 = |x| = x$. Si $x \leq 0$, alors $0 = |x| = -x$ donc $x = 0$.
   Dans tous les cas, on obtient
   $$|x| = 0 \Rightarrow x = 0,$$
   d'où l'équivalence attendue.

3. Il y a quatre cas :
   - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0, |x| = x$ et $|y| = y$ donc
   $$|xy| = xy = |x||y|.$$
   - Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0, |x| = x$ et $|y| = -y$ donc
   $$|xy| = -xy = |x||y|.$$
   - Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0, |x| = -x$ et $|y| = y$ donc
   $$|xy| = -xy = |x||y|.$$
   - Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0, |x| = -x$ et $|y| = -y$ donc
   $$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

   Dans tous les cas, on a bien $|xy| = |x||y|$.
4. - Si $x + y \geq 0$, on a
   $$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$$
   d'après la remarque ci-dessus. On a égalité si et seulement si $x = |x|$ et $y = |y|$, c'est à dire si et seulement si x et y sont tous deux positifs.
   - Si $x + y \leq 0$, on a
   $$|x+y| = -x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|,$$
   encore d'après la remarque ci-dessus. On a égalité si et seulement si $-x = |x|$ et $-y = |y|$, c'est à dire si et seulement si x et y sont tous deux négatifs.

   Dans tous les cas, l'inégalité triangulaire est bien vérifiée avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

■

Corollaire 1

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :
1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq |x| + |y|$.
3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$ et $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Démonstration.

1. D'après le troisième alinéa de la proposition précédente, on a
$$|y| \left|\frac{x}{y}\right| = \left|y\frac{x}{y}\right| = |x|.$$
Puisque $y \neq 0$, on peut diviser par $|y| \neq 0$, et on obtient $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
2. Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire au couple $(x, -y)$ et utiliser le fait que $|-y| = |y|$.

3. Etablissons la première inégalité.
D'après l'inégalité triangulaire, on a
$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$
d'où
$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$
En échangeant le rôle de x et y (qui jouent des rôles symétriques), on obtient
$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$
En combinant les deux inégalités, on trouve
$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$
ce qui équivaut au fait que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
La seconde inégalité découle de la première appliquée à $-y$.

■

Définition 3: Distance

Soient x et y deux nombres réels. On définit la distance de x à y, notée $d(x, y)$, le nombre
$$d(x, y) = |x - y|.$$

Proposition 3: Propriétés de la distance

La distance vérifie les propriétés suivantes :
1. (Positivité) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) \geq 0$.
2. (Séparation) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. (Symétrie) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = d(y, x)$.
4. (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Remarque 3. La dernière inégalité justifie l'appellation « inégalité triangulaire » : en effet, si on appelle x, y, z les sommets d'un triangle, ceci signifie que la longueur de la base, qui est $d(x, y)$ est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Autrement dit, la distance la plus courte d'un point à un autre est la ligne droite !

Démonstration.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ par propriété de la valeur absolue.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :
$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$
3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a par propriété de la valeur absolue :
$$d(y, x) = |y - x| = | - (x - y)| = |x - y| = d(x, y).$$
4. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant l'inégalité triangulaire vérifiée par la valeur absolue, on a
$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

■

4.2.3 Exposants, racine carrée

Définition 4

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On définit

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Remarque 4. • Ceci implique en particulier $0^0 = 1$.

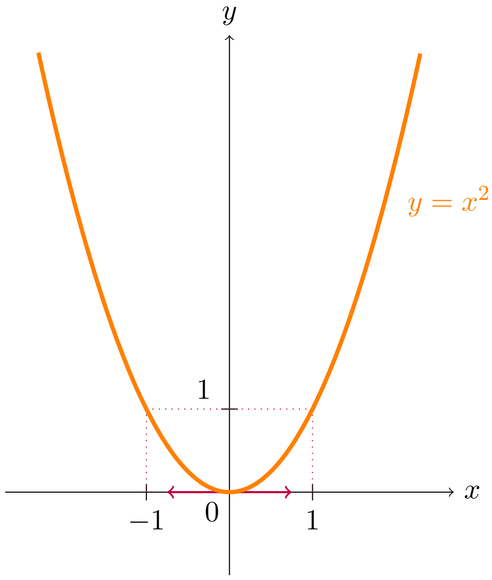
• On a donc défini x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si $x \neq 0$.

Proposition 4: Propriétés des exposants

Soient $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Soient $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On a les propriétés suivantes :

$$1)(xy)^n = x^n y^n; \qquad 2)x^n x^m = x^{n+m}; \qquad 3)(x^n)^m = x^{nm};$$
$$4)\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}; \quad 5)\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \text{ si } x \neq 0.$$

Rappelons que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.



Ainsi, pour tout réel x strictement positif, il existe deux réels, un strictement positif et un strictement négatif, dont les carrés sont égaux à x. Si $x = 0$, le seul nombre dont le carré est nul est 0 lui-même. Ceci légitime la définition suivante.

Définition 5: Racine carrée

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle racine carrée de x, et on note $\sqrt{x}$, l'unique réel positif dont le carré vaut x.

Exemple 3. $\sqrt{25} = 5$.

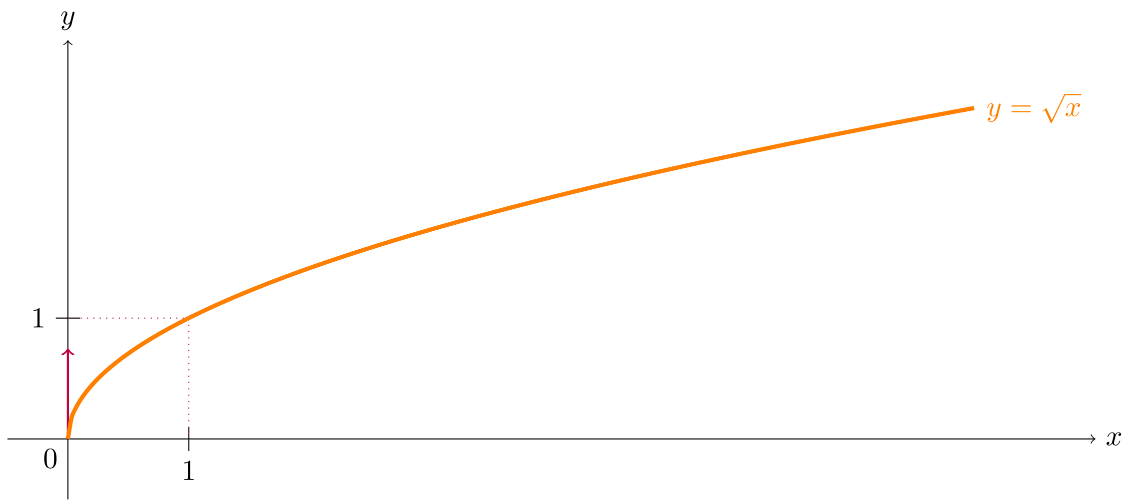
Remarque 5. • Par définition, on a donc pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.

• Pour tout réel $a \geq 0$, on a l'équivalence

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

• La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (comme bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^2$), et vérifie

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$



Proposition 5: Propriétés de la racine carrée

La racine carrée vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$;
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$.

Démonstration.

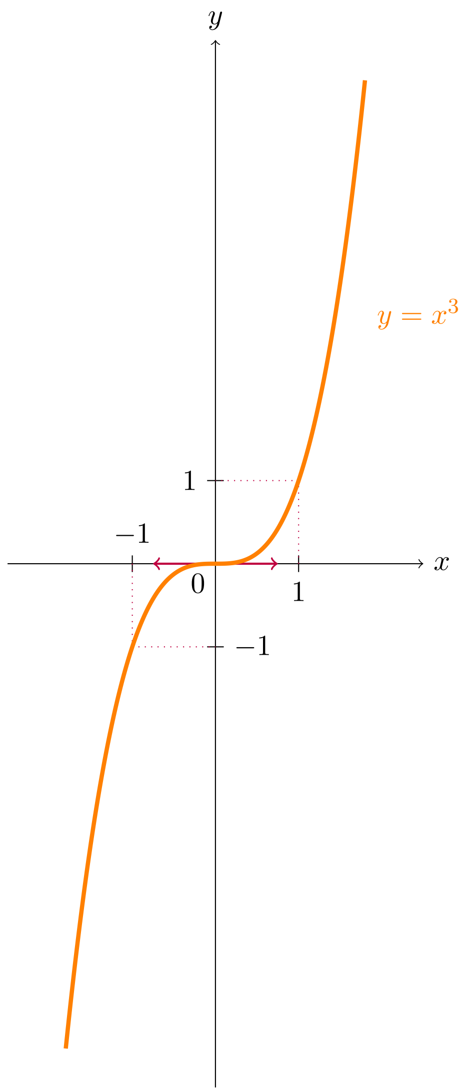
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que puisque $x^2 \geq 0$, $\sqrt{x^2}$ est bien définie. Rappelons que $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut x^2.
   On a l'équivalence
   $$y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x \quad \text{ou} \quad y = -x.$$
   Donc $\sqrt{x^2}$ vaut x si x est positif, ou $-x$ si x est négatif, i.e. $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. D'après les règles sur les puissances, on a
   $$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy.$$
   Ainsi, $\sqrt{x}\sqrt{y}$ est un nombre positif dont le carré vaut xy. Par unicité de ce dernier, on en déduit que $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$.
   Pour $n = 0$, on a $\sqrt{x^0} = \sqrt{1} = 1 = (\sqrt{x})^0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Suposons que $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$. D'après la propriété ci-dessus, on a
   $$\sqrt{x^{n+1}} = \sqrt{x^n \times x} = \sqrt{x^n}\sqrt{x}.$$
   En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient
   $$\sqrt{x^{n+1}} = (\sqrt{x})^n\sqrt{x} = (\sqrt{x})^{n+1},$$
   ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la réccurence.

4. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. D'après le point 2), on a
$$\sqrt{y}\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y\frac{x}{y}} = \sqrt{x}$$
donc en divisant par $\sqrt{y}$ (qui est non nul puisque $y \neq 0$), on obtient $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La propriété a déjà été prouvée pour $n \in \mathbb{N}$. Il reste à la montrer pour les entiers strictement négatifs.
Montrons donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{x^{-n}} = (\sqrt{x})^{-n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'alinéa (3) à $\dfrac{1}{x}$, on obtient :
$$\sqrt{x^{-n}} = \sqrt{\frac{1}{x^n}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n = (\sqrt{x})^{-n}.$$

■

Exemple 4. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.



Ceci légitime la définition suivante.

Définition 6: Racine cubique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle racine cubique de x, et on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique nombre réel dont le cube vaut x.

Remarque 6. • Par définition, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$. On a de plus $\sqrt[3]{x^3} = x$.

• Contrairement à la fonction racine carrée, la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et peut prendre des valeurs négatives.

• Du fait des propriétés sur les puissances, la racine cubique vérifie des propriétés analogues à la racine carrée, à savoir :

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y},\ \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}},\ \sqrt[3]{x^n} = (\sqrt[3]{x})^n.$$

Exemple 5. $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

Remarque 7. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme bijection réciproque de $x \mapsto x^3$) et vérifie

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty.$$

Plus généralement, on peut définir la racine n-ème d'un nombre positif car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Définition 7: Racine n-ème

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ème de x, et on note $\sqrt[n]{x}$, l'unique nombre positif dont la puissance n-ème vaut x.

Remarque 8. • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note également $x^{\frac{1}{n}}$ pour $\sqrt[n]{x}$ de telle sorte que les règles sur les puissances soient respectées :

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}n} = x^1 = x.$$

On peut donc définir les puissances rationnelles de tout nombre positif en posant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{x})^p.$$

La question suivante est de définir x^α pour tout $x > 0$ et tout réel α. Par exemple, quel sens donner à $x^{\sqrt{2}}$? Nous répondrons à cette question dans un chapitre ultérieur.

4.2.4 Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément

Définition 8

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

• Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de l'ensemble E si pour tout $x \in E, x \leq M$.

• Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est un minorant de l'ensemble E si pour tout $x \in E, m \leq x$.

• Soit $a \in E$. On dit que a est le plus grand élément (ou maximum) de E, et on note $a = \max(E)$, si pour tout $x \in E$, on a $x \leq a$.

• Soit $a \in E$. On dit que a est le plus petit élément (ou minimum) de E, et on note $a = \min(E)$, si pour tout $x \in E$, on a $a \leq x$.

Remarque 9. • On a bien unicité, si existence, du plus grand (resp. plus petit) élément de E. En effet, si E admet deux plus grands éléments a et b, alors par définition on a $a \leq b$ (puisque b est le plus grand élément de E) et $b \leq a$ (puisque a est le plus grand élément de E) donc $a = b$. (On traite de même le cas du plus petit élément.)

• Un majorant (resp. un minorant) de E n'appartient pas nécessairement à E.

• Le plus grand (resp. le plus petit) élément de E est un majorant (resp. minorant) de E qui appartient à E.

Exemple 6. Soit $E = \{-1, 1, 3\}$.

• $3; \pi; 1715$ sont des majorants de E. Plus généralement, l'ensemble des majorants de E est $[3, +\infty[$.

• $-1; -\sqrt{2}; -37,5$ sont des minorants de E. Plus généralement, l'ensemble des minorants de E est $]-\infty, -1]$.

• 3 est le plus grand élément de E.

• -1 est le plus petit élément de E.

Définition 9: Partie bornée

Une partie de $\mathbb{R}$ non vide est dite bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple 7. • L'ensemble $\left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné.

• L'intervalle $]-\infty, 1]$ n'est pas borné.

Proposition 6

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.
Alors l'ensemble E est borné si et seulement si il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $x \in E, |x| \leq r$.

Démonstration. • Supposons que E est borné. Alors il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in E$,

$$m \leq x \leq M.$$

Soit $r = \max(|m|, |M|)$. On a les inégalités

$$-r \leq -|m| \leq m \leq x \leq M \leq |M| \leq r$$

d'où $|x| \leq r$.

• Réciproquement, supposons qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $x \in E, |x| \leq r$, i.e.

$$\forall x \in E, -r \leq x \leq r.$$

Ainsi, r est un majorant de E et $-r$ un minorant de E, donc E est borné. ■

4.2.5 Borne supérieure, borne inférieure

Certaines parties de $\mathbb{R}$ n'admettent pas de plus grand (ou de plus petit) élément, comme l'intervalle $]0, 1[$. Néanmoins, cet intervalle admet une borne supérieure, et une borne inférieure. La proposition suivante découle de la construction des nombres réels ; nous ne la démontrerons donc pas et l'utiliserons comme axiome.

Proposition 7: Axiome de la borne supérieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée.
Alors E admet un plus petit majorant : on appelle ce réel la borne supérieure de E et on le note $\sup(E)$.

Remarque 10. On convient que $\sup(E) = +\infty$ si E n'est pas majorée.

Exemple 8. $\sup([0,1[) = 1$. En effet, 1 est un majorant de $[0,1[$ et tout nombre strictement inférieur à 1 n'est pas un majorant de $[0,1[$ car pour tout $x < 1$, il existe $a \in [0,1[$ vérifiant $x < a \leq 1$.

En revanche, $[0,1[$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 8: Caractérisation de la borne supérieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha = \sup(E)$;
2. $$\begin{cases} \forall x \in E, x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha. \end{cases}$$

Démonstration. La deuxième assertion exprime exactement le fait que α est le plus petit majorant de E : en effet, la première ligne du système assure que α est un majorant de E et la deuxième ligne que tout nombre plus petit que α n'est pas un majorant de E. ■

Remarque 11. Soit E une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Si E admet un plus grand élément a, alors $a = \sup(E)$.

En effet, a est bien un majorant de E. De plus, soit $\epsilon > 0$. Il existe bien un élément x de E tel que

$$a - \varepsilon < x \leq a :$$

il suffit de prendre $x = a$.

Réciproquement, supposons que $\sup(E) \in E$. Alors pour tout $x \in E, x \leqslant \sup(E)$ donc $\sup(E) = \max(E)$.

En conclusion : $\sup(E) \in E$ si et seulement si E admet un plus grand élément, qui est nécessairement $\sup(E)$.

Exemple 9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors :

$$\sup([a,b]) = \sup(]a,b]) = \sup([a,b[) = \sup(]a,b[) = \sup(]-\infty,b] = \sup(]-\infty,b[) = b.$$

Proposition 9: Borne inférieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée.
Alors E admet un plus grand minorant : on appelle ce réel la borne inférieure de E et on le note $\inf(E)$.

Remarque 12. On convient que $\inf(E) = -\infty$ si E n'est pas minorée.

Démonstration. Par hypothèse, E est minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E, m \leq x$.

Alors l'ensemble $-E = \{-x | x \in E\}$ est non vide et majoré par $-m$: en effet, pour tout $x \in E, -x \leq -m$.

L'ensemble $-E$ admet donc une borne supérieure. Notons $\alpha = \sup(-E)$. Montrons que $-\alpha = \inf(E)$.

Puisque α est un majorant de $-E$, on a pour tout $x \in E, -x \leq \alpha$ d'où $-\alpha \leq x$, donc $-\alpha$ est un minorant de E.

Montrons que $-\alpha$ est le plus grand minorant de E. Soit β un minorant de E.

On a pour tout $x \in E, \beta \leqslant x$ donc $-x \leqslant -\beta$, i.e. $-\beta$ est un majorant de $-E$. Puisque α est le plus petit majorant de $-E$, on a nécessairement $\alpha \leqslant -\beta$, d'où $\beta \leqslant -\alpha$.

Ainsi, $-\alpha$ est plus grand que tous les minorants de E : c'est donc le plus grand minorant de E, ce qui implique que $-\alpha = \inf(E)$.

■

Remarque 13. On a montré au passage que si E est non vide et minoré,

$$\sup(-E) = -\inf(E).$$

On a de même, si E est majoré, $\inf(-E) = -\sup(E)$.

La borne inférieure vérifie donc les mêmes propriétés que la borne supérieure :

Proposition 10: Caractérisation de la borne inférieure

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha = \inf(E)$;
2. $$\begin{cases} \forall x \in E, \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Remarque 14. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Si $\inf(E) \notin E$, alors E n'admet pas de plus petit élément.

On a l'équivalence : $\inf(E) \in E$ si et seulement si E admet un plus petit élément, qui est nécessairement $\inf(E)$.

Exemple 10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors :

$$\inf([a, b]) = \inf(]a, b]) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b[) = \inf(]a, +\infty[= \inf([a, +\infty[) = a.$$

4.2.6 Partie entière

Commençons par un lemme, utile en soi, qui est en fait une propriété essentielle de $\mathbb{Z}$.

Lemme 1

Soit $E \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée.
Alors E admet un plus grand élément.

Démonstration. E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure $\sup(E)$. Montrons que $\sup(E) \in E$.

Supposons que $\sup(E) \notin E$. Alors par propriété de la borne supérieure, il existe $x \in E$ tel que

$$\sup(E) - 1 < x < \sup(E).$$

Puisque $x < \sup(E), x$ n'est pas un majorant de E donc il existe $y \in E$ tel que

$$\sup(E) - 1 < x < y < \sup(E).$$

Puisque $E \subset \mathbb{Z}, x$ et y sont des entiers donc $y - x$ est un entier et cet entier vérifie :

$$0 < y - x < 1,$$

ce qui est absurde car il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

On a donc nécessairement $\sup(E) \in E$. ■

Remarque 15. On montre de même que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Proposition 11: Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

On appelle cet entier partie entière de x, et on le note $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de la partie entière de x.

Soit $E = \{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$. Tout d'abord, E est non vide, sinon on aurait $n > x$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui impliquerait que $\mathbb{Z}$ est minoré et mènerait à une absurdité.

D'autre part, E est majoré par x. C'est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$: elle admet donc un plus grand élément, que l'on note $\lfloor x \rfloor$.

Puisque $\lfloor x \rfloor \in E,$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$. D'autre part, puisque $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand élément de E, alors $\lfloor x \rfloor + 1 \notin E$, i.e. $\lfloor x \rfloor + 1 > x$.

L'entier $\lfloor x \rfloor$ satisfait donc la propriété attendue. Montrons que c'est le seul.

Supposons qu'il existe deux entiers n et m tels que

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \\ m \leq x < m+1. \end{cases}$$

Ceci implique que $m < n+1$ donc $m \leq n$. Par symétrie, on a de même $n \leq m$ d'où $n = m$, ce qui assure l'unicité de la partie entière de x. ■

Exemple 11. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Remarque 16. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et on a l'équivalence :

$$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 12: Propriétés de la partie entière

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. De plus, elle est discontinue en tous les entiers relatifs : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.

Démonstration. Soient x et y deux réels avec $x \leq y$.

On a $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Or, $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$ implique que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$, d'où la croissance de la fonction partie entière.

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, x \geq \lfloor x \rfloor$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

Enfin, soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction partie entière est constante égale à $n-1$ sur $[n-1, n[$ et constante égale à n sur $[n, n+1[$ donc les limites en découlent. ■

4.3 Résolution d'équations et d'inéquations

4.3.1 Equations

Rappelons les méthodes de résolution des équations de degré 1 et 2 :

Proposition 13: Equations du premier degré

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
L'équation $ax+b=0$ admet pour unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Proposition 14: Trinômes du second degré

Soient a,b,c trois réels avec $a \neq 0$.
Soit $(E) : ax^2+bx+c=0$.
On appelle discriminant de l'équation (E) le réel $\Delta = b^2-4ac$.
Il y a trois cas :
• Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles (ou racines) distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une seule solution (ou racine double)

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

• Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet pas de solution réelle.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0. \end{aligned}$$

(A ce stade, on a mis le trinôme sous forme canonique.) Il y a donc trois cas :
• Si $\Delta > 0$, on peut factoriser :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

• Si $\Delta = 0$, on a

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

• Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. Puisque $a \neq 0$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \neq 0,$$

ce qui implique que l'équation (E) n'a pas de solution réelle. ■

Remarque 17. Grâce à la forme canonique, on obtient que :

• si $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ obtenu en $x = -\dfrac{b}{2a}$ et vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$;

• si $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ obtenu en $x = -\dfrac{b}{2a}$ et vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$;

On a également démontré le corollaire suivant :

Corollaire 2

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Supposons que $\Delta \geq 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E) (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

La formule factorisée ci-dessus implique les deux corollaires suivants :

Corollaire 3: Signe d'un trinôme du second degré

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines : i.e. si on note $x_1 < x_2$ les racines de P, alors $P(x)$ est du signe de a si $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$ et du signe opposé si $x_1 \leq x \leq x_2$ (et s'annule en x_1 et en x_2).
2. Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est toujours du signe de a (et s'annule une seule fois en la racine double du trinôme).
3. Si $\Delta < 0, P(x)$ est toujours du signe de a et ne s'annule jamais.

Démonstration.

1. Si $\Delta > 0$, on a $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ si $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$ et $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ si $x_1 \leq x \leq x_2$. Le résultat en découle en multipliant par a.
2. Si $\Delta = 0$, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Le résultat en découle en multipliant par a.
3. Si $\Delta < 0$, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. Encore une fois, le résultat en découle en multipliant par a.

■

Corollaire 4: Relations cœfficients-racines

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Supposons que $\Delta \geq 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E) (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).
On a les relations suivantes entre les cœfficients et les racines du trinôme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de développer la forme factorisée : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

Par identification des cœfficients, (par exemple en prenant $x = 0$ puis $x = 1$) on a

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c. \end{cases}$$

d'où les formules attendues en divisant par $a \neq 0$. ■

Remarque 18. Réciproquement, si on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où S et P sont deux réels, alors les solutions sont les racines du trinôme $x^2 - Sx + P$.

En effet, le système équivaut à

$$\begin{cases} y = S - x \\ x(S - x) = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ x^2 - Sx + P = 0. \end{cases}$$

4.3.2 Inéquations

Rappelons avant toute chose quelques règles élémentaires sur les inégalités :

Proposition 15

Soient a et b deux réels. On a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $c \in \mathbb{R}, a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.
2. • Si $x > 0, a \leq b \Leftrightarrow ax \leq bx$;
   • si $x < 0, a \leq b \Leftrightarrow ax \geq bx$.
3. • Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$;
   • Si $a \leq b < 0$, alors $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a} < 0$;
   • Si $a < 0 < b$, alors $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$.

Enfin, signalons les propriétés suivantes, utiles pour résoudre des inéquations :

Proposition 16

1. $\bullet \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x \leq y;$
   $\bullet \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2, x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow y \leq x;$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow x \leq y;$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y.$
4. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow x \leq y.$